INTEGRALES IMPROPIAS DE PRIMERA ESPECIE
Criterios de convergencia

Criterios de convergencia para integrales impropias de primera especie como premisas para la asimilación de criterios análogos sobre series numéricas.

Antonio MAZÓN ÁVILA
Juan PÉREZ ROJAS

Introducción

En el trabajo se definen las integrales impropias de primera especie y se proponen dos teoremas que permiten determinar la convergencia de la integral, sin necesidad de hallar la primitiva de la función, a través de la comparación para este tipo de integral, así como otro teorema que contribuye al análisis de la convergencia absoluta y condicional. Lo anterior tiene como objetivo facilitar la revelación de los nexos y la concatenación que existe con la teoría análoga en las series numéricas para términos positivos y términos variables, durante el desarrollo del Proceso de Enseñanza de la matemática III

Desarrollo

Algunos aspectos teóricos-pedagógicos

Un objetivo importante en la enseñanza de la matemática es la asimilación por parte de los alumnos de un saber seguro, exacto, estructurado sistemáticamente y aplicable. Ellos deben adquirir habilidades en los conceptos, teoremas y procedimientos fundamentales de una asignatura, sobre todos los que constituyen base para la comprensión de otras asignaturas del año, disciplina y carrera. Entiéndase por habilidades según **Rubinstein**, los componentes automatizados de la actividad consciente del hombre, que son elaborados en el proceso de su realización. Una vez que los alumnos tengan formadas las habilidades referidas anteriormente podrán resolver problemas, cuestión básica en la enseñaza de la Matemática.

Una de las habilidades que debe formarse en los estudiantes de las carreras de Ciencias Técnicas de Cuba lo constituye ¨ Determinar la convergencia ó divergencia de las integrales impropias¨, implícita en los programas de la Matemática I. Estas integrales impropias específicamente las de primera especie trascienden a los programas de la Matemática I, pues son utilizadas en la Matemática III para analizar el carácter de una serie de términos positivos a través del criterio de la integral y donde a partir de la solución de la integral impropia asociada a la serie se puede determinar el carácter de la misma y viceversa.

Por otra parte también son utilizados en la Matemática III, el criterio de comparación para determinar el carácter de algunas series de términos positivos, así como el criterio que permite analizar la convergencia absoluta y condicional de una serie de términos variables, de ahí que creemos que resulta importante el trabajo con los diferentes criterios sobre las integrales impropias que permitan determinar la convergencia de un integral impropia sin necesidad de calcular su primitiva. Generalmente esta teoría no se aborda durante la impartición de la Matemática I, por lo que recomendamos planificar y organizar la distribución de los contenidos de manera que dicha teoría relacionada con las integrales impropias de primera especie sea desarrollada en Proceso de Enseñanza de la Matemática I

Lo anterior contribuirá a que los alumnos asimilen la teoría relacionada con la series, pues se podrá realizar una adecuadaza sistematización entre las dos teorías, garantizando un nivel de partida óptimo en los estudiantes, a través del desarrollo del Proceso de enseñanza de la Matemática III

Las integrales impropias de primera especie. Criterios de convergencia

En el capítulo referido a las integrales definidas se estudia las integrales propias o de Riemann de f(x), en $[a,b]$ y donde el intervalo es acotado y la función es acotada en dicho intervalo.

Definición: Sea $f(x)$ *continua* en intervalos de la formas $[a,+\infty)$, $(-\infty,b]$ o en $(-\infty,+\infty)$. A las integrales $\int_a^{+\infty} f(x)dx$, $\int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx$ y $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ se le llama integrales impropias de primera especie.

En cuanto al primer caso podemos definir la función z (b) = $\int_a^b f(x)dx,\ con\ b \geq a$, si $\lim\limits_{b\to+\infty} z(b)=l$ llamamos a la primera integral convergente y por definición $\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim\limits_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)\,dx$ = l, si para $b \to +\infty$ la función z (b) no tiene límite (finito) la primera integral se llamará divergente y no tendrá ningún valor numérico.

A continuación determinaremos para qué valor de m, $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^m}$ converge y para qué valores diverge.

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^m} = \lim_{b\to+\infty}\int_1^b \frac{dx}{x^m} = \lim_{b\to+\infty}\left(\frac{b^{1-m}}{1-m} - \frac{1}{1-m}\right) = \begin{cases} \frac{1}{m-1}, & m \rangle 1\ converge \\ +\infty, & m \langle 1\ diverge \end{cases}$$

En el caso en que m =1 tendremos $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x} = \lim\limits_{b\to+\infty}\int_1^b \frac{dx}{x} = \lim\limits_{b\to+\infty}(\ln b - \ln 1) = +\infty$ por lo tanto concluimos que

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^m} = \begin{cases} converge,\ m \rangle 1 \\ diverge\ ,\ m \leq 1 \end{cases}$$

Teorema 1. Sea f (x) y g(x) integrables en $[a,b]$ con a < b y $0 \leq f(x) \leq g(x)\ \forall\ x \geq a$ entonces

i) si $\int_a^{+\infty} g(x)\,dx$ converge $\Rightarrow \int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ converge

ii) si $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ diverge $\Rightarrow \int_a^{+\infty} g(x)dx$ diverge

Demostremos i) si $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ converge, $\Rightarrow \int_a^{+\infty} f(x)dx$ converge.

Definamos z (b) = $\int_a^{b} f(x)dx$ la cual tiene límite finito cuando b$\to\infty$, como f(x) es no negativa $\forall\, x\geq a$ se cumple que z (b) es una función no decreciente de b, ahora si $b_1 \rangle b$ entonces

z (b_1) = $\int_a^{b_1} f(x)dx = \int_a^{b} f(x)dx + \int_b^{b_1} f(x)dx \geq \int_a^{b} f(x)dx = z(b)$, luego z(b) es no decreciente, si además tenemos que $f(x)\leq g(x)\quad \forall\, x\geq a$ y $\forall\ b\rangle a$ tendremos que z (b)= $\int_a^{b} f(x)dx \leq \int_a^{b} g(x)dx \leq \int_a^{+\infty} g(x)dx = l$, de lo anterior concluimos que z(b) está acotada superiormente cunado b$\to+\infty$

Por tanto como z (b) es no decreciente y está acotada superiormente entonces $\exists \lim_{b\to+\infty} z(b)$ lo que quier decir que z (b) = $\int_a^{b} f(x)dx \quad converge$

Demostremos i i) por el absurdo. Supongamos que $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ converge entonces por el aspecto i) del teorema 1, $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ converge, lo cual es una contradicción por tanto $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ diverge.

Ejemplos: Analizar la convergencia de las integrales siguientes:

a) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{e^{-x^4}}{1+x^2+\cos^4 x}dx$

$0\langle \dfrac{e^{-x^4}}{1+x^2+\cos^4 x} \leq \dfrac{1}{1+x^2} \leq \dfrac{1}{x^2} \quad \forall\, x\geq 1$ como $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^2}$ converge, m =2 $\rangle 1$ entonces $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{e^{-x^4}}{1+x^2+\cos^4 x}dx$ converge.

b) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{x+2}{\sqrt{x^3}}dx$

$\frac{x+2}{\sqrt{x^3}} \rangle \frac{x}{\sqrt{x^3}} = \frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}}$, $\forall x \geq 1$, como $\int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} dx$ diverge pues m = $\frac{1}{2} \langle 1$ entonces $\int_1^{+\infty} \frac{x+2}{\sqrt{x^3}} dx$ diverge.

Teorema 2: Sean f(x) y g(x) continuas y no negativas $\forall x \geq a$ y sea que g(x) es diferente de cero para todos los x bastante grandes. Entonces, si existe el límite finito

$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = k \neq 0$ **,** las integrales $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ y $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ convergen o divergen simultáneamente

Ejemplos: Analizar la convergencia de

a) $\int_1^{+\infty} \frac{x^{\frac{3}{2}}}{1+x^2} dx$

Sea f(x) = $\frac{x^{\frac{3}{2}}}{1+x^2}$, seleccionemos g(x) = $\frac{1}{x^{\frac{1}{2}}}$, $\lim_{x \to +\infty} \frac{\frac{x^{\frac{3}{2}}}{1+x^2}}{\frac{1}{x^{\frac{1}{2}}}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2}{1+x^2} = 1 \neq 0$ como

$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}} dx$ diverge m = $\frac{1}{2} \langle 1$ entonces $\int_1^{+\infty} \frac{x^{\frac{3}{2}}}{1+x^2} dx$ diverge

b) $\int_1^{+\infty} 2sen^2\left(\frac{1}{x}\right) dx$

2sen$^2\left(\frac{1}{x}\right) \approx \frac{2}{x^2}$ $cuando\ x \to +\infty$, sea f(x) = $2sen^2\left(\frac{1}{x}\right)$ es positiva y continua $\forall x \geq 1$

y g(x) = $\frac{1}{x^2}$ es positiva y continua $\forall x \geq 1$

$\lim_{x \to +\infty} \frac{2sen^2\left(\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\frac{2}{x^2}}{\frac{1}{x^2}} = 2 \neq 0$, como $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$ converge m=2 $\rangle 1 \Rightarrow \int_1^{+\infty} sen^2\left(\frac{1}{x}\right) dx$ converge

Integrales absolutamente convergentes

Definición: Sea la función f(x) definida $\forall\, x \geq a$ e integrable en $[a,b]$, donde $b \rangle a$ la integral $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ se denomina absolutamente convergente, si converge la integral $\int_a^{+\infty} |f(x)|\,dx$

Si la integral $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ converge y $\int_a^{+\infty} |f(x)|\,dx$ diverge, entonces $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ se denomina integral condicionalmente convergente.

Teorema 3: Si la integral $\int_a^{+\infty} |f(x)|\,dx$ converge, entonces la integral converge también

Demostración. Consideremos que $\int_a^{+\infty} |f(x)|\,dx$ converge, entonces $\lim_{b\to+\infty} \int_a^{+\infty} |f(x)|dx = l \langle +\infty$, ahora como $\forall\, x$ del dominio de la función f(x) se cumple $-|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)|$, si sumamos $|f(x)|$ a todos los miembros de la desigualdad tendremos

$0 \leq |f(x)| + f(x) \leq 2|f(x)|$, luego la integral $\int_a^{+\infty} 2|f(x)|dx = 2\int_a^{+\infty} |f(x)|dx$ converge de ahí que $\int_a^{+\infty} \left(f(x) + |f(x)|\right)dx$ converge por el teorema 1 y el apartado i). Esto último significa que la integral $\int_a^{b} \left(f(x) + |f(x)|\right)dx$ tiene límite finito cuando $b \to +\infty$, ahora podemos escribir f(x) = f(x)+ $|f(x)| - |f(x)|$ $\forall\, x \geq a$ y de donde para cualquier $b \rangle a$ tendremos

$\int_a^{b} f(x)\,dx = \int_a^{b} \left(f(x) + |f(x)|\right)dx - \int_a^{b} |f(x)\,dx|$, todo sumando del miembro derecho de la igualdad anterior tiene límite finito cuando $b \to +\infty$. Por lo tanto la integral $\int_a^{b} f(x)dx$ cuando $b \to +\infty$, tiene también límite finito, es decir la integral $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ converge

Ejemplo: Analizar la convergencia de $\int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2} dx$

$\left|\frac{\cos x}{x^2}\right| \leq \frac{1}{x^2}$ $\forall\, x,\ x \rangle 1$. La integral $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$ converge, pues m =2 $\rangle\, 1$, por consiguiente la integral dada es absolutamente convergente, por lo tanto converge. El reciproco no se cumple: la integral $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ puede ser convergente y no ser absolutamente convergente

Ejemplos: Analicemos la convergencia de:

a) $\int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x} dx$, desarrollemos esta integral por partes u = $\frac{1}{x}$, $du = \frac{-1}{x^2} dx$ d v = cos x d x, v =sen x

$\int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x} dx = -sen 1 + \int_1^{+\infty} \frac{senx}{x^2} dx$, $\left| \frac{senx}{x^2} \right| \leq \frac{1}{x^2}$ $\forall$ x, $x \rangle 1$. Aplicando el procedimiento anterior concluimos que $\int_1^{+\infty} \frac{senx}{x^2} dx$ es absolutamente convergente y por lo tanto converge. De esta manera son finitas las dos expresiones en el miembro derecho de la igualdad anterior, por tanto el miembro izquierdo es finito y $\int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x} dx$ converge.

b) $\int_1^{+\infty} \frac{|\cos x|}{x} dx$, mostremos que esta integral no converge absolutamente, es decir que $\int_1^{+\infty} \frac{|\cos x|}{x} dx$ diverge. En efecto de la desigualdad $|\cos x| \geq \cos^2 x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2x$ dividiendo esta desigualdad por x$\rangle 1$ y para cualquier $b \rangle 1$ tenemos $\int_1^{b} \frac{|\cos x|}{x} dx \geq \frac{1}{2} \int_1^{b} \frac{dx}{x} + \frac{1}{2} \int_1^{b} \frac{\cos 2x}{x} dx$, (1), la integral $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x}$ diverge, pues m =1

Analicemos $\int_1^{+\infty} \frac{\cos 2x}{x} dx$ utilizando el método por partes u = $\frac{1}{x}$, $du = \frac{-1}{x^2} dx$, y d v =cos2x d x , v = $\frac{1}{2} sen 2x$, luego $\int_1^{+\infty} \frac{\cos 2x}{x} dx = -\frac{1}{2} sen 2 + \frac{1}{2} \int_1^{+\infty} \frac{sen 2x}{x^2} dx$ y la misma converge, ahora si consideramos que $b \to +\infty$ en la desigualdad (1) obtendremos que el miembro derecho es infinito por tanto el izquierdo es infinito también, de donde $\int_1^{+\infty} \frac{|\cos x|}{x} dx$ diverge. Por lo que $\int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x} dx$ no converge absolutamente. Es condicionalmente convergente

<u>Conclusiones</u>:

Los criterios para determinar la convergencia o divergencia de las integrales impropias de primera especie, sin hallar la primitiva de la función propiciará:

-Facilitar la revelación de los nexos y la concatenación que existe con la teoría análoga en las series numéricas para términos positivos y términos variables, durante el desarrollo del Proceso de Enseñanza de la matemática III

-La creación de nivel de partida necesario para la asimilación de la teoría análoga en las series numéricas para términos positivos y términos variables, durante el desarrollo del Proceso de Enseñanza de la matemática III

- El establecimiento de una adecuada sistematización entre los criterios para determinar la convergencia o divergencia de las integrales impropias de primera especie, sin hallar la primitiva de la función con la teoría análoga en las series numéricas para términos positivos y términos variables, durante el desarrollo del Proceso de Enseñanza de la matemática III

Bibliografía

Hernández, H. Didáctica de la Matemática. Artículos para el debate. 1993 del ISPJAE

ISPJAE, II Taller Internacional sobre la enseñanza de la Matemática para ingeniería y arquitectura, 1998.

Jungk, Werner. Conferencias sobre Metodología de la Enseñanza de la Matemática (2) Primera Parte. Editorial de Libros para la educación. Ministerio de Educación. La Habana, 1979.

M.Krasnov y otros Curso de Matemáticas para Ingenieros, 1990

P.E.Dankó y otros 1era parte. Matemáticas Superiores en Ejercicios y Problemas
Trabajo Colectivo de Especialistas del Ministerio de Educación de Cuba bajo la dirección del Instituto Central de Ciencias Pedagógicas

Ya. S.Bugrov. S.M.Nikolski. Matemáticas Superiores. Cálculo Diferencial e Integral

Antonio Mazón Ávila

an@mat.upr.edu.cu

Master en Ciencias de la Educación

y Jefe del Colectivo de Matemática para las Carreras de Ciencias Técnicas en la

Universidad de Pinar del Río, Cuba

Juan Pérez Rojas

JPerez@mat.upr.edu.cu

Master en Ciencias de la Educación y

Jefe de la Disciplina de Matemática para la carrera de Geología en la

Universidad de Pinar del Río, Cuba