El trasfondo físico de la geometría relativista einsteniana

Alejandro R. Álvarez Silva.

Ernest Mach se decidió a intentar eliminar el espacio como una causa activa de todo el sistema de la Mecánica. De acuerdo con sus ideas, una partícula material no se mueve con un movimiento acelerado respecto al espacio sino con respecto al centro de todas las otras masas del universo.

En la física newtoniana, la razón de las masas de dos cuerpos en Mecánica se define de dos modos que difieren sustancialmente entre sí. Uno de ellos se refiere a que hace esa razón igual a la inversa de la razón de las aceleraciones que la misma fuerza motriz imprime a los dos cuerpos en cuestión. Sería la masa inerte. El otro modo de definir la razón de las masas es la de hacerla igual a la razón de las fuerzas que actúan sobre ellas en el mismo campo gravitatorio (masa gravitacional o ponderada). Por la experiencia de Eötvös (entre otras muchas), conocemos la igualdad de ambas masas, definidas de maneras tan diferentes, con una gran precisión. A Einstein le llamó la atención tal circunstancia, cuando la Mecánica Clásica anterior a él, no ofrecía ninguna explicación convincente a tal eventualidad. Pues bien, Einstein elevó esta equivalencia a principio: el "principio de equivalencia". (Aunque realmente reserva este nombre a la equivalencia entre los sistemas de coordenadas K y K´; el segundo dotado de aceleración uniforme respecto a K. Todas las masas se comportan exactamente como si existiese un campo gravitatorio y K´ no poseyese aceleración).

Todo ello supone que a todos los efectos una "gravitación" es simplemente un movimiento (equivalencia); también, esas masas que "producen" gravitación, pueden ser sustituidas por un "cierto" movimiento, movimiento que queda prefigurado por una "trayectoria", por un espacio, por una geometría. O sea, podríamos sustituir enteramente las "fuerzas" (gravitación) por "variaciones" en la geometría. ¡Este es el mensaje profundo del principio de equivalencia!

Si se consideran sistemas de coordenadas que respecto de los inerciales están dotados de aceleraciones y de movimientos rotatorios, se llega al resultado de que el campo gravitatorio influye sobre las leyes métricas del continuo espacio-tiempo de la Relatividad Especial, y hasta las determina.

En presencia de un campo gravitatorio la geometría válida que rige la configuración de los cuerpos rígidos ideales es no euclidiana. Y el caso es análogo al que se presenta en el estudio bidimensional de superficies curvas.

Gauss resolvió todos estos temas, en su teoría de las superficies, introduciendo coordenadas curvilíneas que, además de satisfacer las condiciones de continuidad, eran arbitrarias por completo, aún cuando se hallaban relacionadas con las propiedades métricas de la superficie para la cual se usaban.

Y el punto más importante entre la teoría de Gauss de las superficies y la Relatividad General se halla en las propiedades métricas en las que se basan, sustancialmente, los conceptos de ambas teorías.

Como la geometría plana se fundamenta en el concepto de las distancias ds entre dos puntos "infinitamente próximos", con una apropiada elección de coordenadas cartesianas, esa distancia puede expresarse mediante la fórmula $ds^2= dx_1^2+dx_2^2$. Sobre esta cantidad podemos basar los conceptos de línea recta, como geodésica ($\partial\int ds = 0$) del intervalo, del círculo y del ángulo, conceptos que forman los fundamentos de la Geometría euclidiana.

Puede desarrollarse otra Geometría sobre una superficie continuamente curvada, observando que una porción infinitamente pequeña de ella puede considerarse como plana con errores infinitesimales. Sobre esta porción pequeña existen coordenadas cartesianas x_1, x_2, y la distancia entre los puntos de ella será ds ($ds^2=dx_1^2+dx_2^2$).

Utilizando coordenadas curvilíneas arbitrarias x_1, x_2 sobre la superficie, las dx_1 y dx_2 pueden expresarse linealmente en función de dx_1 y dx_2. Así que, para cualquier región de la superficie, tenemos:

$$ds^2=g_{11}dx_1^2+2g_{12}dx_1dx_2+g_{22}dx_2^2$$

donde g_{11}, g_{12} y g_{22} están determinados por la naturaleza de la superficie y la elección de coordenadas.

Si se conocen todas estas cantidades puede determinarse la manera de trazar sobre la superficie tales retículas. O sea, la geometría de las superficies puede basarse en la expresión dada para ds, exactamente del mismo modo como la Geometría plana está basada sobre la correspondiente expresión.

Las regiones espacio-temporales de extensión finita no son, en general galileanas, así que no puede eliminarse un campo gravitatorio mediante una elección conveniente del sistema de coordenadas. Sin embargo, el invariante ds^2 (escrito ahora en las cuatro coordenadas de la Relatividad Especial) existe siempre para los puntos (sucesos) próximos del continuo. Ahora, ds^2, puede expresarse en la forma:

$$ds^2=g_{uv}\, dx_u\, dx_v$$

Las funciones g_{uv} describen, respecto del sistema de coordenadas arbitrariamente elegido, las relaciones métricas del continuo espacio-tiempo y también el campo gravitatorio. Hay que tener en cuenta, no obstante, que los elementos lineales que tienen el carácter de tiempo poseen un ds imaginario.

Recapitulando: Es evidente que dado el hecho de que la formulación de la Teoría General de la Relatividad supone una generalización de la teoría de los invariantes y de la teoría de los tensores, se presenta la cuestión de saber cuál es la forma de las ecuaciones que son covariantes respecto a transformaciones arbitrarias de puntos.

En particular, el cálculo generalizado de los tensores fue desarrollado por los matemáticos mucho antes de conocerse la Teoría de la Relatividad.

Riemann continuó la línea de pensamiento de Gauss, incluyendo un número de dimensiones cualesquiera. Más tarde se desarrolló la teoría en forma de cálculo tensorial, debido principalmente a los trabajos de Ricci y Levi-Cività.

Una vez realizada esta presentación del tema, señalando la crucial importancia de la equivalencia entre la masa inerte y la masa ponderada o gravitatoria, que marca la línea a seguir para la extensión de la Relatividad Restringida a todos los sistemas inerciales sean cuales sean sus estados de movimiento, abarcando así el campo gravitatorio, y que pasa por una <u>anulación</u> de las fuerzas físicas, en su camino hacia una <u>geometrización</u> de la Física, es hora de introducirnos en los conceptos geométricos que proporcionan tal desarrollo.

En Matemáticas, un tensor es una clase de entidad algebraica de varias componentes que generaliza los conceptos de escalar, vector y matriz de modo que es independiente del sistema de coordenadas elegido, y en algunos casos puede ser representado por una matriz de los componentes.

El cálculo tensorial fue ampliamente aceptado a partir del año 1915 con la aparición de la Teoría de la Relatividad General de Einstein, formulada totalmente en este lenguaje de los tensores, pero también es ampliamente utilizado en la Mecánica de los medios continuos (tensor de tensiones, elasticidad lineal, etc.).

El campo tensorial se define por un valor tensorial en cada punto de una variedad.

Hay dos formas de enfrentarse a la noción de tensor:

1. Definiéndolo como un objeto cuyos componentes se transforman bajo cambios de coordenadas según ciertas reglas, introduciendo la idea de transformaciones covariantes o contravariantes. (Esta es la visión propia de la Física).
2. Matemáticamente, definiendo ciertos espacios vectoriales obtenidos a partir de un espacio vectorial dado, sin fijar conjuntos de coordenadas hasta que las bases se introducen por necesidad.

Como ejemplo, los vectores covariantes de primer orden, también se describen como uno-formas o como los elementos del espacio dual.

Las relaciones en la naturaleza no son siempre lineales, pero la gran mayoría son diferenciales, por lo que pueden aproximarse localmente con sumas de funciones multilineales, por eso en física la mayoría de las cantidades pueden expresarse como tensores, de ahí su utilidad.

Tensores bien conocidos en geometría son las formas cuadráticas y el tensor de curvatura; otros, desde el punto de vista físico, son la energía-momento y el de polarización.

Las cantidades escalares –masa, temperatura, etc.- se pueden representar por un solo número; los de tipo vector, como la fuerza, requieren una lista de números para su descripción. Las formas cuadráticas requieren una matriz con índices múltiples para su representación, lo que hace que sólo se puedan concebir como tensores.

Pero, la noción tensorial es absolutamente general, y se aplica a todos los ejemplos anteriores: escalares, vectores, etc. Lo que les distingue a unos de otros es el número de índices de la "matriz de representación", llamado <u>rango</u> del tensor. Así,

los escalares son los tensores de rango cero (sin índices), y los vectores son tensores de rango uno.
Entonces, los tensores son matrices multidimensionales que son generalizaciones n-dimensionales de los escalares, vectores de 1 dimensión y vectores de 2 dimensiones. En los campos tensoriales los elementos del tensor son funciones, o aún diferenciales.

Más modernamente se consideran los tensores como objetos abstractos, que expresan un cierto tipo definido de concepto multilineal. Sus propiedades se derivan de sus definiciones como funciones lineales o aún más generales; y las reglas para su manipulación son una extensión del álgebra lineal al álgebra multilineal. Desde este punto de vista se podría decir que los tensores son elementos de un cierto espacio tensorial.

Un tensor contravariante de segundo orden es aquel que se transforma según la expresión:

$$A'^{ij} = \partial x_i'/\partial x_k \ \ \partial x_j'/\partial x_l \ A^{kl} \qquad (1)$$

Si x_k es una base cualquiera del espacio y aplicamos una transformación de coordenadas que nos lleva a una base x_k' (supongamos la transformación ortogonal), debe existir una cierta relación entre la base antigua y la nueva que viene dada por una matriz de cambio "O" que nos permite recuperar las coordenadas de la base antigua con respecto a las de la nueva base. Será:

$$X_i = O_{ij} \ x_j' \qquad (2)$$

Como se trata de una transformación ortogonal ($O^{-1} \equiv O^T$) el cambio inverso es:

$$X_j' = O_{ji} \ X_i \qquad (3)$$

El vector "A" en la nueva base viene dado por:

$$A_i = O_{ji} \ A_j' \qquad (4)$$

Con estas notaciones el tensor (1) se expresará como:

$$A'^{\ j1\ j2} = O_{j1\ i1} \ O_{j2i2} \ A^{i1i2} \qquad (5)$$

Y como dijimos se llaman tensores contravariantes, porque precisamente se transforman con la matriz inversa, escribiéndose los índices de sus componentes arriba a modo de superíndice.

A los tensores que se transforman en la matriz transpuesta se llaman covariantes, y los índices se escriben debajo.

El tensor métrico, en la geometría de Riemann, es un tensor de rango 2 que se utiliza para definir conceptos métricos como distancia, ángulo y volumen en un espacio localmente euclídeo.

El tensor métrico aparece como una matriz, notada convencionalmente G. Y la notación g_{ij} se utiliza para los componentes del tensor métrico (es decir, los elementos de la matriz). Así el tensor métrico g se expresa, fijada una base de coordenadas, como:

$$g = \sum^{n}_{i,j=1} g_{ij} \ dx^i \otimes dx^j \qquad (6)$$ siendo $\otimes$ el producto tensorial

$$
G = \begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} \ldots & g_{1n} \\ g_{21} & g_{22} \ldots & g_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \ldots \\ g_{n1} & g_{n2} \ldots & g_{nn} \end{vmatrix}
$$

Y usando la convención de la adición de Einstein:

$$g=g_{ij}\, dx^i \otimes dx^j \qquad (7)$$

……………………………………………………………………………………..

Cualquier expresión suma a base de términos idénticos, como ésta:

$u=c_1x_1+c_2x_2+c_3x_3+\ldots..+c_nx_n$

que se escribe típicamente en forma de sumatorio:

$u=\sum^n_{i=1} c_ix_i$

El convenio de Einstein permite escribirla de manera mucho más simple como:

$u= c_ix_i$

……………………………………………………………………………………..

La longitud de un segmento de una curva dada parametrizada por t, desde a hasta b, se define como:

$$L= \int^b_a (g_{ij}\, \mathbf{x}^i\, \mathbf{x}^j)^{½}\, dt \qquad (8)$$

El ángulo entre dos vectores u y v (o entre dos curvas cuyos vectores tangentes son u y v) se define como:

$$\cos \theta = g_{ij}\, U^i\, V^j\, (|g_{ij}\, U^iU^j|\; |g_{ij}\, V^iV^j|)^{½} \qquad (9)$$

El n-volumen de una región R de una variedad de dimensión n viene dado por la integral extendida a dicha región de la n-forma de volumen:

$$V_R= \int_R (|g|)^{½}\;\; dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 \wedge \ldots . \wedge dx^n \qquad (10)$$

……………………………………………………………………………………..

Un <u>tensor de curvatura</u> es una generalización de la curvatura de Gauss a dimensiones más altas.

En 2 dimensiones la curvatura puede representarse por un número escalar (tensor de orden cero), en 3 dimensiones por un tensor de segundo orden (como el tensor de Ricci).
Para dimensiones generalizadas se necesita al menos un tensor de cuarto orden (como el tensor de Riemann).

Las nociones básicas de la geometría de Riemann son:

1. Las conexiones.
2. El transporte paralelo.
3. La curvatura.

El transporte paralelo es equivalente a especificar una derivada covariante (o una conexión). A su vez una conexión (diferenciación covariante) determina el tensor de curvatura de Riemann. Concretamente, el tensor de curvatura viene dado en términos de una conexión por la fórmula siguiente:

$$R\,(u,v)\,w = \nabla_u \nabla_v w - \nabla_v \nabla_u w - \nabla_{[u,\,v]}\, w \qquad (11)$$

El tensor de curvatura, vía holonomía, determina el transporte paralelo.

……………………………………………………………………………………………..

Una variedad de Riemann es una variedad diferenciable real en la que cada espacio tangente se dota con un producto interior de manera que varíe suavemente punto a punto, lo que permite que puedan definirse nociones métricas como longitud de curvas, ángulos, áreas (o volúmenes), curvatura, gradiente de funciones y divergencia de campos vectoriales.

El producto interior en □^{n} (el producto escalar euclediano familiar) permite que se definan longitudes de vectores y los ángulos entre los mismos. Por ejemplo, si **a** y **b** son vectores en □^{n}, entonces **a**^{2} es la longitud al cuadrado del vector, y **a**□**b** determina el coseno del ángulo entre ellos (**a**□**b**= ||a|| ||b|| cos θ). El producto interior puede definirse para cualquier espacio vectorial. El filtrado tangente de una variedad diferenciable (o de hecho, cualquier fibrado vectorial sobre una variedad) es, considerado punto a punto, un espacio vectorial, y puede llevar también, pues, un producto interior. Y si el producto interior en el espacio tangente de una variedad se define suavemente, entonces los conceptos que solamente estaban definidos punto a punto en cada espacio tangente, se pueden integrar y aplicar a regiones finitas de la variedad. Así que en este contexto, el espacio tangente sería una traslación infinitesimal en la variedad. El producto interno en el espacio tangente da la longitud de una traslación infinitesimal; la integral de esta longitud da la longitud de una curva en la variedad.

Las variedades de Riemann son generalmente "curvas", y podemos encontrar, dados dos puntos diferentes y suficientemente cercanos, la curva de longitud mínima (aunque no tiene porqué ser única). Las líneas de mínima longitud se llaman líneas geodésicas, y son una generalización del concepto de "línea recta". Serían las curvas que localmente conectan sus puntos a lo largo de las trayectorias más cortas.

Dada una curva γ: $[a, b] \rightarrow M$ contenida en una variedad riemanniana M, definimos la longitud de dicha curva $L(\gamma)$ mediante el vector tangente a la misma y las componentes g_{ij} del tensor métrico g, mediante la expresión:

$$L(\gamma)= \int^b_a \left(\Sigma_{i,j}\, g_{i,j}\, \chi_i´(t)\;\; \chi_j´(t)\, dt\right)^{½} \qquad (12)$$

Donde χ_i (t) es la expresión paramétrica de los puntos de la curva parámetrizada por el parámetro t.

Usando los símbolos de Christoffel asociados a la conexión sin torsión, la curva geodésica de mínima longitud que pasa por un punto x_0 y tiene el vector tangente v, satisface la ecuación:

$$d^2\, x^u/dt^2 + \Sigma_{\sigma v}\;\; \Gamma^u{}_{\sigma v}\;\; dx^\sigma/dt \quad dx^v/dt = 0 \qquad (13)$$

Pero no adelantemos acontecimientos.

Desde el advenimiento de la Relatividad Restringida era evidente que las leyes generales de la naturaleza deberían expresarse por ecuaciones que fuesen válidas para todos los sistemas de coordenadas, es decir, que fuesen <u>covariantes</u> con respecto a cualesquiera sustituciones, es decir, como dijimos al principio del artículo, tienen que ser descritas por tensores, que son independientes de cualquier sistema de coordenadas.

También hemos visto que estos tensores están caracterizados porque las ecuaciones de transformación para sus componentes son lineales y homogéneas. En consecuencia, todas las componentes en el nuevo sistema se anulan si todas se anulan en el sistema original. Si, por lo tanto, una ley de la naturaleza se expresa igualando a cero todas las componentes de un tensor, dicha ley es generalmente covariante.

En la expresión invariante para el cuadrado del elemento de línea:

$ds^2= g_{ur}\ dx_u\ dx_r$, la parte que desempeñarán las dx_u es la de un vector contravariante que puede escogerse a voluntad. Puesto que además $g_{ur}=g_{ru}$, g_{ur} es un <u>tensor covariante de segundo rango simétrico</u>, al que se le llama "tensor fundamental".

Por la regla para la diferenciación de determinantes:

$$dg=g^{ur}\ g\ dg_{ur}= -g_{ur}\ g\ dg^{ur} \qquad (14)$$

El último miembro se obtiene del penúltimo si se tiene en cuenta que $g_{ur}\ d\ g^{\mathbf{ur}}= \delta^{\mathbf{u}}{}_{u}$ de modo que $g_{ur}\ g^{ur}=4$,

Y en consecuencia:

$$g_{ur}\ dg^{ur} + g^{ur}\ g\ dg_{ur}=0$$

Y operando se obtiene:

$$1/(-g)^{½}\ \delta(-g)^{½}/\delta x_{\sigma}= \{u\sigma,\ u\} \qquad (15)$$

La "divergencia" de un vector contravariante A^v es:

$$\phi= 1/(-g)^{½}\ \delta\ ((-g)^{½}\ A^v \qquad (16)$$

Y el "rotacional" de un vector covariante es:

$$\beta_{ur}=\delta A_u/\delta x_r- \delta A_r/\delta x_u \qquad (17)$$

En la notación de Christoffel, se tiene:

$$[ur,\ \sigma]= ½\ (\delta g_{u\sigma}/\delta x_r+\delta g_{r\sigma}/\delta x_u+\delta g_{ur}/\delta x_{\sigma}) \qquad (18)$$

Obteniéndose para las ecuaciones de la línea geodésica:

$$d^2x_{\tau}/ds^2+ \{uv,\ \tau\}\ dx_u/ds\quad dx_v/ds=0 \qquad (19)$$

Donde, nuevamente siguiendo a Christoffel se ha hecho:

$$\{uv,\ \tau\}=g^{\tau\alpha}\ \{uv,\ \alpha\} \qquad (20)$$

Se demuestra que a partir del tensor covariante de primer rango $A_u = \delta\phi/\delta x_u$, se puede formar por diferenciación un tensor covariante de segundo rango:

$$A_{uv}=\delta A_u/\delta x_v - \{uv, \tau\} A_\tau \qquad (21)$$

llamado la "extensión" (derivada covariante) del tensor A_u.

Y para el tensor de tercer rango se obtiene:

$$A_{uv\sigma}=\delta A_{uv}/\delta x_\sigma - \{\sigma v, \tau\}A_{\tau v} - \{\sigma v, \tau\} A_{u\tau} \qquad (22)$$

donde hemos puesto $A_{uv}=A_u A_v$.

Busquemos ahora el tensor que se obtiene a partir del tensor fundamental, sólo por diferenciación.

Colocando en (21) el tensor fundamental de las g_{uv} en vez de cualquier tensor A_{uv}, obtenemos la extensión del tensor fundamental, pero resulta que tal extensión es idénticamente nula.

Así que para obtener nuestro objetivo, colocamos en (21) el tensor:

$$A_{uv}=\delta A_u/\delta x_v - \{uv, \rho\} A_\rho \qquad (23)$$

por ejemplo, la extensión del cuadrivector A_u. Se obtiene entonces el tensor de tercer rango:

$$A_{u\sigma\tau}= \delta^2 A_u/\delta x_\sigma \delta x_\tau - \{u\sigma, \rho\} \delta A_\rho/\delta x_\tau - \{u\tau, \rho\} \delta A_\rho/\delta x_\sigma - \{\sigma\tau, \rho\} \delta A_u/\delta x_\rho +$$

$$+ [- \delta\{u\sigma, \rho\}/\delta x_\tau + \{u\tau, \alpha\}\{\alpha\sigma, \rho\}+ \{\sigma\tau, \alpha\} \{\alpha u, \rho\}] A_\rho \qquad (24)$$

Esta expresión sugiere formar el tensor $A_{u\sigma\tau} - A_{u\tau\sigma}$.

Operando, se obtiene:

$$A_{u\sigma\tau} - A_{u\tau\sigma}= B^\rho{}_{u\sigma\tau} A_\rho \qquad (25)$$

Donde:

$$B^\rho{}_{u\sigma\tau} = - \delta \{u\sigma, \rho\}/\delta x_\tau + \delta \{u\tau, \rho\}/\delta x_\sigma - \{u\sigma, \alpha\}\{\alpha\tau, \rho\} + \{u\tau, \alpha\}\{\alpha\sigma, \rho\} \qquad (26)$$

$B^\rho{}_{u\sigma\tau}$ es el tensor de Riemann-Christoffel. La importancia de este tensor se ve a continuación. Si el continuo es de tal naturaleza que existe un sistema de referencia donde las g_{uv} son constantes, entonces todas las $B^\rho{}_{u\sigma\tau}$ se anulan. Si se escoge cualquier nuevo sistema de coordenadas en vez de las originales, las nuevas g_{uv} entonces no serán constantes, pero como consecuencia de su carácter tensorial las componentes transformadas de $B^\rho{}_{u\sigma\tau}$ seguirán siendo nulas en el nuevo sistema. Así que la anulación del tensor de Riemann es una condición <u>necesaria</u> para que, por una elección apropiada del sistema de referencia, las g_{uv} puedan ser constantes. Y esta sería la utilidad del tensor de Riemann, pues una elección adecuada del sistema de referencia, hace que la Teoría de la Relatividad Especial sea válida para una región finita del continuo.

Construyendo (26) con respecto a los índices τ y ρ se obtiene el tensor covariante de segundo grado:

$G_{uv}=B^{\rho}_{uv\rho} = R_{uv}+S_{uv}$, donde

$$R_{uv}= - \delta\{uv, \alpha\}/\delta x_{\sigma} + \{u\alpha, B\}\{vB, \alpha\} \qquad (27)$$

$S_{uv}= \delta^2 \log (-g)^{½}/\delta x_u \, \delta x_v - \{uv, \alpha\} \, \delta \log(-g)^{½}/\delta x_{\sigma}$

La elección de las coordenadas puede hacerse ventajosamente de modo que $(-g)^{½}=1$. La particularización de la elección de coordenadas origina la anulación de S_{uv}, así que el tensor G_{uv} se reduce a R_{uv}.

Si hacemos $\qquad \Gamma^{\tau}_{uv}= -\{uv, \tau\} \qquad (28)$

la ecuación de movimiento de un punto material en un campo gravitatorio se convierte, con respecto al sistema de coordenadas K_1 en:

$$d^2 x_{\tau}/ds^2= \Gamma^{\rho}_{uv} \, dx_u/dx_{\tau} \, dx_v/ds \qquad (29)$$

(Puesto que la línea geodésica está definida con independencia del sistema de referencia, su ecuación es también la ecuación de movimiento del punto material con respecto a K_1).

También se toma la hipótesis de que este sistema de coordenadas covariante define el movimiento del punto en el campo gravitatorio en el caso en que no hay ningún sistema de referencia K_0 con respecto al cual la Teoría de la Relatividad Especial es válida en una región finita.

Si las Γ^{τ}_{uv} se anulan, el punto se mueve uniformemente en una línea recta; por tanto, estas cantidades son las que condicionan la desviación del movimiento respecto a la uniformidad, es decir, son las componentes del campo gravitatorio.

Para el campo gravitatorio libre de energía, el tensor simétrico G_{uv}, derivado del tensor $B^0_{uv\tau}$, debe anularse. Así se obtienen diez ecuaciones para las diez cantidades g_{uv}, que se satisfacen en el caso especial de la anulación de todas las $B^{\rho}_{uv\tau}$.

Teniendo en cuenta las (27), las ecuaciones para el campo libre de materia son:

$$\delta \, \Gamma^{\alpha}_{uv}/\delta x_{\sigma} + \Gamma^{\alpha}_{u\beta} \, \Gamma^{\beta}_{v\alpha} =0 \qquad (-g)^{½}=1 \qquad (30)$$

Estas ecuaciones, combinadas con las de movimiento (29), dan en primera aproximación la ley de gravedad newtoniana, y en segunda la explicación del movimiento del perihelio del planeta Mercurio descubierto por Leverrier.

Tales ecuaciones de campo pueden escribirse en forma hamiltoniana:

$\delta \, \{H \, dt\}=0$

$$H=g^{uv} \, \Gamma^{\alpha}_{u\beta} \, \Gamma^{\beta}_{v\alpha} \qquad (30\text{ a})$$

$(-g)^{½}=1$

Operando se llega a la ecuación:

$$k \, t^{\alpha}_{\sigma}= ½ \; \delta^{\alpha}_{\sigma} \, g^{uv} \, \Gamma^{\lambda}_{u\beta} \, \Gamma^{\beta}_{v\lambda} - g^{uv} \, \Gamma^{\alpha}_{v\lambda} \, \Gamma^{\beta}_{v\sigma} \qquad (31)$$

Esta ecuación expresa la ley de conservación del momento y la energía para el campo gravitatorio. En realidad, la integración de esta ecuación sobre un volumen tridimensional V da las cuatro ecuaciones:

$$d/dx_4 \int t^4{}_\sigma \; dV = \int(l\, t^1{}_\sigma + m\, t^2{}_\sigma + n\, t^3{}_\sigma)\, dS \qquad (32)$$

donde l, m, n denotan los cosenos directores de la dirección de la normal interior en el elemento dS de la superficie frontera (en el sentido de la geometría euclediana). Serían las expresiones de las leyes de conservación en su forma habitual.

A las cantidades $t^\alpha{}_\sigma$ se las llama "componentes de energía" del campo gravitatorio.

Las ecuaciones (30) también se pueden poner en la forma:

$$\delta\, (g^{\alpha\beta} \;\; \Gamma^\alpha{}_{u\beta}) = -k\, (t^\sigma{}_u - ½\, \delta^\sigma{}_u\, t) \qquad (-g)^{½}=1 \qquad (33)$$

Las ecuaciones de campo para el espacio libre de materia obtenidas anteriormente, deben compararse con la ecuación de campo de Poisson de la teoría de Newton, $\nabla^2 \phi=0$.

Ahora exigimos que se cumpla la ecuación correspondiente a dicha ecuación de Poisson,
$\nabla^2\, \phi= 4\pi\lambda\, \varphi$, donde φ es la densidad de materia.

En (33) es preciso introducir en vez de solo las componentes de energía del campo gravitatorio, las sumas $t^\sigma{}_u+T^\sigma{}_u$ de las componentes de energía de materia y de campo gravitatorio. Entonces, en vez de las (33) se obtiene ahora:

$$\delta\, (g^{\alpha\beta} \;\; \Gamma^\alpha{}_{u\beta})/\delta x_\sigma = -k\, [(t^\sigma{}_u + T^\sigma{}_u) - ½ \;\; \delta^\sigma{}_u\, (t+T) \qquad (-g)^{½}=1 \qquad (34)$$

donde se ha hecho $T=T^u{}_u$ (escalar de Lane).

La ecuación (34) también puede ponerse en la forma:

$$\delta\, (g^{\alpha\beta} \;\; \Gamma^\alpha{}_{u\beta} - ½ \;\; \delta^\sigma{}_u \;\; g^{\lambda\beta} \;\; \Gamma^\alpha{}_{\lambda\beta})/\delta x_\alpha = -k\, (t^\sigma{}_u + T^\sigma{}_u) \qquad (35)$$

Y haciendo la operación $\delta/\delta x_\sigma$ se llega a la expresión:

$$\delta\, (t^\sigma{}_u + T^\sigma{}_u)/\delta x_\sigma = 0 \qquad (36)$$

O sea, se satisfacen las <u>leyes de conservación</u> de momento y energía.

También, partiendo de (33) se llega a la ecuación:

$$\delta\, t^\alpha{}_\sigma/\delta\, x_\alpha + ½ \;\; \delta\, g^{uv}/\delta\, x_\sigma \;\; T_{uv} = 0 \qquad (37)$$

La aparición del segundo término en el primer miembro muestra que las leyes de conservación de momento y energía no se aplican en sentido estricto para la materia únicamente, o bien que se aplican sólo cuando las g^{uv} son constantes, por ejemplo cuando se anulan las intensidades de campo de gravitación. Este segundo término es una expresión para el momento y para la energía transferidas por unidad de volumen y tiempo desde el campo gravitatorio a la materia, lo que se manifiesta de manera más clara poniendo (37) en la forma:

$$\delta\, T^\alpha{}_\sigma/\delta x_\alpha = T^\beta{}_{\alpha\sigma} \;\; T^\alpha{}_\beta \qquad (37\ a)$$

El miembro derecho expresa el efecto energético del campo gravitatorio sobre la materia.

Por consiguiente, las ecuaciones de campo de gravitación contienen cuatro condiciones que gobiernan el curso de los fenómenos materiales, dando por completo las ecuaciones de los fenómenos materiales, si aquellas pueden caracterizarse por cuatro ecuaciones diferenciales mutuamente independientes.

REFERENCIAS

"La gran Ilusión". Stephen Hawking. (Crítica 2007).

"El significado de la Relatividad". Albert Einstein.

Wikipedia. (Tensor de curvatura, Variedad de Riemann, Tensor de Ricci, Tensor métrico, Producto y Cálculo tensorial, Convenio de sumación de Einstein, etc.).

"Simbiotica´s Blog". (http://simbiotica.wordpress.com/).

Alejandro R. Álvarez Silva.
alejandro_alv@yahoo.es