Elementos de una
TEORIA RELATIVISTA DE LA GRAVITACION

por Rodolfo CARABIO

1. CONCEPTO DE INTERACCION GRAVITATORIA

En este trabajo se mostrara cómo es posible establecer una teoría de la gravitación a partir de los postulados y resultados de la relatividad especial.

Para hacerlo se parte del hecho que la relación masa-energía es el resultado mas elevado que se desprende del formalismo matemático (ecuaciones funcionales) que establece la relatividad especial (Véase Deducción de la Dinámica Relativista con Ecuaciones Funcionales), por tanto esta relación sirve de base a la teoría de la gravitación subsecuente, esto puede verse al deducir la relación masa-energía. Sin embargo a fin de establecer la teoría relativista de la gravitación es necesario además definir como es la interacción gravitatoria.

El concepto de interacción es mas amplio que el de fuerza, incluyendo el intercambio de energía entre los cuerpos considerados.

Para el caso de la interacción gravitatoria, si postulamos a la misma como la interacción mas básica podemos establecer el siguiente:

Principio De Interacción Gravitacional

Si dos o mas cuerpos se desplazan bajo la fuerza gravitacional existente entre ellos, la masa de los mismos permanecerá constante medida en el lugar donde se encuentren en el instante dado

Este enunciado obliga a replantearnos su validez si observamos que no cumple con el Principio de Conservación de la Energía. En efecto, de acuerdo a lo ya visto en la relación masa-energía, para que un sistema aislado de cuerpos se ponga en movimiento es necesario que parte de su masa se convierta en la energía cinética del sistema.

A fin de que el principio de interacción gravitatoria no entre en contradicción con los principios y resultados de la Dinámica Relativista, es necesario reconsiderar el significado del espacio –tiempo en el campo gravitatorio con respecto a un marco de referencia alejado de manera similar a lo hecho en la Cinemática Relativista para marcos de referencia con movimiento relativo uniforme.

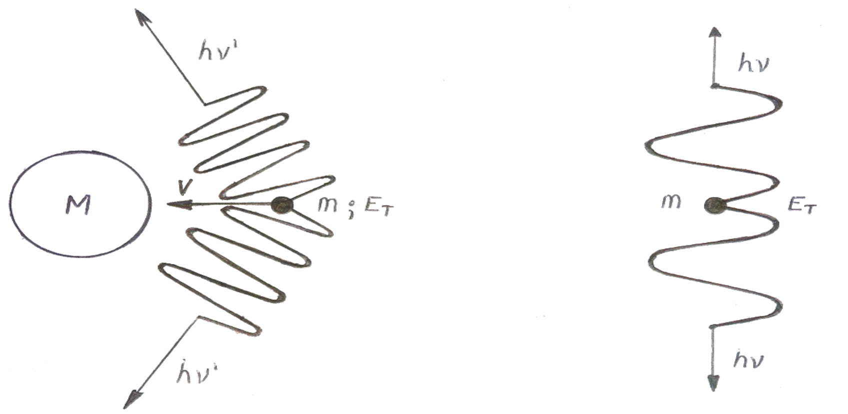
En primer lugar si consideramos que el tiempo transcurre con mayor lentitud dentro del campo gravitatorio con respecto a un marco de referencia alejado, de acuerdo a la física cuántica, Si la frecuencia de un par de fotones emitidos por la desintegración de un cuerpo de masa (m) en un punto situado lejos del campo gravitatorio es (v), la energía total (Et) medida en este marco alejado de referencia es:

$$Et = m.c^2 = 2h.v$$

Si en cambio el cuerpo cae dentro del campo gravitatorio y se desintegra en algún lugar cualquiera del mismo, de acuerdo al Principio de Interacción Gravitacional adquiere determinada energía cinética, que se suma a su energía de masa que permanece invariable. La energía total ahora es:

$$Et' = m.c^2 + Ec = 2h.v'$$

Podemos graficar ambos sucesos en el esquema que sigue:



Al escapar del campo gravitatorio los dos fotones de frecuencia inicial v' según el lugar en el cual se produjo la desintegración a partir de una masa (m), deben variar su frecuencia y por consiguiente su energía a la misma magnitud que tienen los dos fotones emitidos por la misma masa situada fuera del campo, a fin que se cumpla el Principio de Conservación de La Energía.

El par de fotones de frecuencia v' medida dentro del campo gravitatorio, tendrá la frecuencia $v<v'$ medida en un punto alejado si el tiempo transcurre mas rápido con respecto al lugar dentro del campo en la relación:

$$v' / v = T / T'$$

Podemos escribir la relación entre v y v' a partir de la relación entre Et y Et'

$$2h.v' = 2h.v + Ec$$
$$2h.v' = 2h.v - \Delta U$$
$$v' = v - \Delta U/2h$$

De acuerdo a la relación masa–energía, y la formula de la energía del fotón, según el esquema se cumple:

$$h.v = m.c^2$$

$$v = m.c^2 / 2h$$

$$v' = v\,(1 - \Delta U\ /2h.v)$$
$$v' = v\,(1 - \Delta U /m.c^2)$$

$$T^{/} = T /(1 - \Delta U /mc^2)$$

Como U es negativo en este caso $T^{/} < T$

Si la desintegración se produce estando el cuerpo en reposo dentro del campo gravitatorio esto no cambia el calculo de la relación de energías de los pares de fotones medidos dentro y fuera del mismo .Teniendo en cuenta la relación masa-energía, podemos decir que si la masa de un cuerpo en reposo medida en un punto situado dentro del campo gravitatorio es m', para un observador ubicado en un punto alejado la masa de tal cuerpo será percibida como $m < m'$

$$m = hv/c^2 \quad ; \quad m' = h.v'/c^2$$

$$m = (v/v').m'$$
$$m = m' /(1 - \Delta U /mc^2)$$
$$m - \Delta U /c^2 = m'$$

$$m = m'.(1 + \Delta U /m'c^2) \quad (1)$$

De acuerdo a la ley de gravitación clásica, la variación ΔU_1 de la energía potencial de un cuerpo de masa m', medida ésta en la superficie de un objeto de masa M y radio R al pasar al radio r está dada por la formula:

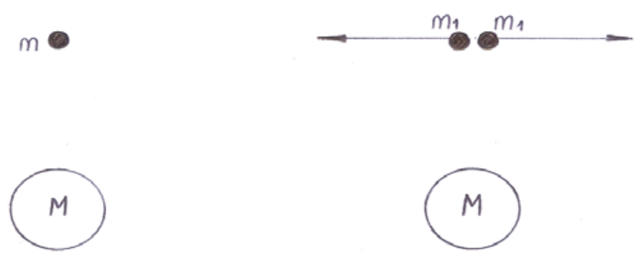
$$\Delta U_1 = G.M.m' \,[\, 1/R - 1/r \,]$$

Siendo el valor ΔU_1 el valor igual con signo contrario a ΔU ; $\Delta U = -\Delta U_1$

Introduciendo este valor de ΔU en la relación (1) entre m y m' :

$$m = m' \,[\, 1 - (G.M/c^2)(\, 1/R - 1/r \,) \,]$$

Sin embargo para determinar de forma exacta la función U de la energía potencial es necesario tener en cuenta la relación masa-energía, y el Principio de Conservación de la Energía en el esquema que sigue



Sea un cuerpo de prueba de masa despreciable (m) en el campo gravitatorio producido por el cuerpo masivo M. Al estar (m) en reposo en primera aproximación aplicamos la ley de gravitación clásica para hallar la energía potencial, tal aplicación debe ser numéricamente correcta para el caso de campos débiles producidos por la fuente M

$$U = - G.M.m / r \qquad (2)$$

Si el cuerpo de prueba por medio de su propia energía de masa se desintegra en dos partes iguales m_1 con velocidades v_1 cada una, esta suceso no puede cambiar la energía potencial total de ambos cuerpos. Esto es que para llevarlos desde su posición inicial desde la desintegración hasta el infinito sin variar la velocidad de los mismos debe hacerse el mismo trabajo que para llevar el cuerpo inicial m hasta el infinito en reposo.

Siendo un sistema aislado, la relación entre m y m_1 es:

$$m = 2m_1 / \sqrt{1 - v^2 / c^2} \qquad (3)$$

Reemplazando m dado por (3) por su equivalente en la formula (2) de gravitación clásica

$$U = -\frac{2GM.m_1}{r.\sqrt{1 - v^2 / c^2}}$$

De modo genérico para un solo cuerpo:

$$U = -\frac{G.M.m}{r.\sqrt{1 - v^2 / c^2}} \qquad (4)$$

En función de la energía total:

$$U = - G.M.Et / c^2.r$$

La energía total dentro del campo gravitatorio la podemos escribir como la suma de la energía total en el infinito $Et\infty$ y la energía potencial en el punto dado

$$Et = Et\infty - U$$

Introduciendo este valor en la expresión del potencial en función de la energía total:

$$U = -(G.M/c^2.r)(Et\infty - U)$$

$$U = -G.M.Et\infty /c^2.r + G.M.U/c^2.r$$

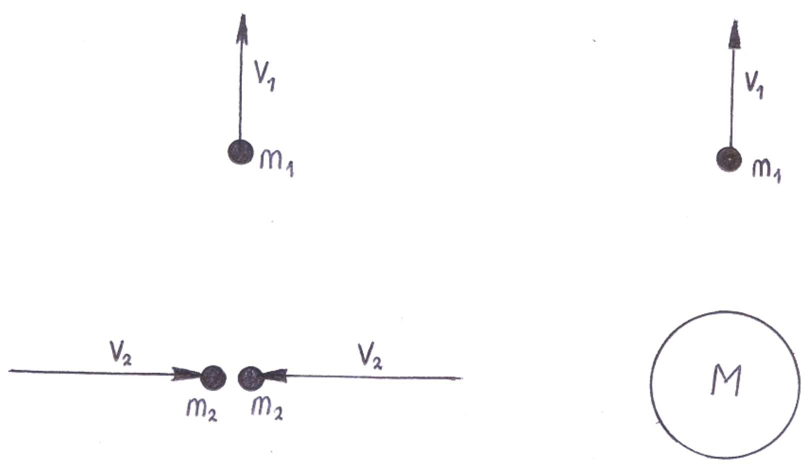
$$U - G.M.U/c^2.r = -G.M.Et\infty /c^2.r$$

$$U(1 - G.M/c^2.r) = -G.M.Et\infty /c^2.r$$

$$U = -G.M.Et\infty /c^2(r - G.M/c^2) \quad (5)$$

Podemos considerar (5) como exacta para grandes velocidades en campos débiles.

Para campos gravitatorios fuertes y grandes velocidades se puede reducir el problema a campos débiles y grandes velocidades en el esquema que sigue:



Se representan dos cuerpos de masa pequeña m_2 y campo gravitatorio débil con gran velocidad v_2 al encuentro uno del otro, y un tercer cuerpo de masa m_1 y velocidad arbitraria v_1.

En esta situación física se puede calcular exactamente [De acuerdo a (4)] la energía potencial del cuerpo m_1 con respecto a los dos cuerpos m_2. Al chocar estos, se fusionan en un solo cuerpo masivo M, que por la gran energía cinética en relación a sus energías de masa en reposo resulta $M >> 2m_2$, de manera que se crea un fuerte campo gravitatorio. Este suceso no puede cambiar la energía potencial del cuerpo m_1 ahora con respecto al cuerpo M en vez de los dos cuerpos m_2.

Para antes y después del choque la energía potencial la escribimos de acuerdo a la ya sabido. Se tiene la velocidad relativa Vr entre m_1 y m_2, la energía potencial en función de Vr se escribe, de acuerdo a (4):

$$U = -2.G.m_2.m_1 \ /r\sqrt{1 - Vr^2/c^2}$$

Para hallar Vr, se puede aplicar la ley de composición de velocidades relativista sin restricciones, ya que en esta situación física inicial no hay campos gravitatorios intensos

$$Vr^2 = v_2{}^2 + v_1{}^2(1 - v_2{}^2/c^2)$$
$$Vr^2 = v_2{}^2 + v_1{}^2 - v_1{}^2.v_2{}^2/c^2$$

Factorizando y operando resulta:

$$1 - Vr^2/c^2 = (1 - v_1{}^2/c^2).(1 - v_2{}^2/c^2)$$
$$U = -\frac{2G.m_1.m_2}{r.\sqrt{1 - v_1{}^2/c^2}.\sqrt{1 - v_2{}^2/c^2}}$$

De acuerdo al esquema de choque el cuerpo resultante M queda en reposo, teniendo en cuenta la expresión de la energía total relativista podemos escribir la formula anterior en la forma:

$$U = -G.Et_1.Et_2/c^4.r$$

Teniendo en cuenta que M queda en reposo → $Et_1 = M.c^2$, podemos escribir U en la forma

$$U = -G.M.Et_1/c^2.r$$

Que es la misma a la deducida para campos débiles y grandes velocidades, la formación del cuerpo masivo M produce una variación relativa del decurso del tiempo en su entorno, pero no modifica la validez de la expresión obtenida.

De manera que de acuerdo a los esquemas utilizados basándose en la Relatividad Especial y el Principio de Interacción Gravitatoria es posible establecer una teoría de la gravitación valida en campos fuertes y grandes velocidades demostrando la validez de la formula (5):

$$U = -\frac{G.M.Et\infty}{c^2(r - G.M/c^2)}$$

Ahora podemos hallar la relación entre los intervalos de tiempo t' y t medidos entre los observadores situados dentro y fuera del campo gravitatorio.

De acuerdo al principio de Interacción Gravitacional se había obtenido una relación exacta entre T y T' en la expresión:

$$T' = T/(1 - U/mc^2)$$

$$T = (1 - U/mc^2)T'$$

$$T = [1+ G.M.Et\infty\ /c^2(r - G.M/c^2)mc^2\ ]$$

Llegados a este punto, queda indefinida la relación entre T y T', debido al valor arbitrario que puede tener $Et\infty$,esto se debe a que al establecer la relación $T'=T/(1 - U/mc^2)$, se supuso que $Et\infty=mc^2$, entonces poniendo este valor en la expresión anterior resulta:

$$T = T'/(1 - G.M/c^2r)$$

Que es la relación exacta

2. CAMPO GRAVITATORIO PARA CUERPOS MASIVOS

La interacción gravitatoria para cuerpos masivos requiere para su calculo el empleo de la formula mas general

$$U = - G.Et_1.Et_2\ /c^4 r$$

El uso de esa expresión es necesario ya que son los dos cuerpos masivos M_1 y M_2 los que se mueven

Para simplificar consideramos el caso en el cual

$$M_1 = M_2$$
$$Et\infty_1 = Et\infty_2$$

$$U = -\frac{G}{c^4.r}(Et\infty - U/2)^2$$

$$U = -\frac{G}{c^4.r}(Et\infty^2 - Et\infty.U + U^2/4)$$

$$U = - G.Et\infty^2/c^4 r + G.Et\infty.U /c^4 r - G.U^2 /4c^4 r$$

$$U - G.Et\infty.U /c^4 r + G.U^2 /4c^4 r = - G.Et\infty^2 /c^4 r$$

$$G.U^2 /4c^4 r + (1 - G.Et\infty/c^4 r).U + G.Et\infty^2 /c^4 r = 0$$

$$U^2 + 4.(c^4 r /G - Et\infty).U + 4.Et\infty^2 = 0$$

Resolviendo la ecuación de 2º grado para U

$$U = - 2.(c^4 r /G - Et\infty) + \sqrt{4(c^4 r / G - Et\infty)^2 - 4Et\infty^2}$$

$$U = 2(c^4 r/G - Et\infty).[\sqrt{1 - \frac{Et\infty^2}{(c^4 r / G - Et\infty^2)^2}} - 1]$$

La energía potencial mínima Umin, es cuando la distancia r entre los centros de M;

$$r = \frac{2G.Et\infty}{c^4} \; ;$$

$$Umin = -2Et\infty$$

Velocidad de salida

Para calcular la velocidad de escape en relatividad, tenemos en cuenta que la energía cinética debe ser de igual magnitud que la energía potencial

$$Ec = -U$$
$$Ec = G.M.Et\infty/c^2.r$$

$$Et - mc^2 = G.M.Et\infty/c^2.r$$
$$Et - G.M.Et/c^2.r = mc^2$$
$$Et.(1 - G.M/c^2.r) = mc^2$$

$$\frac{mc^2}{\sqrt{1 - Vs^2/c^2}} = \frac{mc^2}{1 - G.M/c^2 r}$$

$$1 - Vs^2/c^2 = (1 - G.M/c^2.r)^2$$

Operando, resulta para la velocidad de salida

$$Vs = c.\sqrt{1 - (1 - G.M/c^2.r)^2}$$

Corrección relativista de las orbitas

Basándonos en los conceptos de la relatividad especial se obtiene la ecuación de la trayectoria en un campo central simétrico tal como sigue:

$$Et = \sqrt{p^2 c^2 + m^2 c4}$$

Componiendo el impulso p en función de la componente radial pr y tangencial pt

$$Et^2 = (pt^2 + pr^2)c^2 + m^2 c4$$
$$pr^2 = \frac{Et^2 - m^2 c4}{c^2} - pt^2$$

$$\frac{Et.Vr}{c^2} = \sqrt{\frac{Et^2 - m^2 c4}{c^2} - \frac{L^2}{r^2}}$$

Teniendo en cuenta las relaciones

$$Vr = dr/dt$$
$$dt = r.\, d\phi / Vt$$

$$Vr = \frac{dr.Vt}{r.d\phi}$$

$$Vt = pt.c^2 / Et$$

$$Vt = L.c^2 / r.Et$$

$$\frac{Et.}{c^2} . \frac{dr}{r.d\phi} . \frac{L.c^2}{r.Et} = \sqrt{\frac{Et^2 - m^2.c4}{c^2} - \frac{L^2}{r^2}}$$
$$L.\frac{dr}{d\phi} = \sqrt{\frac{Et^2 - m^2c4}{c^2} - \frac{L^2}{r^2}} .r^2$$

$$d\phi = \frac{L.dr}{\sqrt{\frac{Et^2 - m^2c4}{c^2} - \frac{L^2}{c^2}} .r^2} .$$

Reemplazando Et por su equivalente, se tiene la integral de la trayectoria

$$Et = E - U + mc^2$$

$$\phi = \int \frac{L.dr}{\sqrt{2m(E-U) + (E-U)^2 / c^2 - L^2 / r^2} .r^2}$$

Asignando a la energía potencial el valor clásico mas la 1ª corrección relativista al desarrollar en serie

$$U = - G.M.Et\infty / c^2(r - GM / c^2)$$

La energía total en el infinito es la suma de la energía de masa mas la cinética en el infinito; $Et\infty = mc^2 + Ec\infty$, la energía cinética en el infinito a su vez es la energía E=constante del cuerpo en el sistema.

La división teniendo en cuenta el segundo orden de pequeñez se escribe

$$U \approx - G.M(mc^2+Ec\infty) / c^2r - G^2.M^2(mc^2+Ec\infty)/c^4\, r^2$$
$$U \approx - G.M.m / r - G.M.Ec\infty / c^2.r - G^2.M^2.m / c^2.r^2$$

Dado que $E\infty << mc^2$, es una característica fija del cuerpo, la expresión de la energía potencial se puede escribir en la forma:

$$U = - G.M.m / r - G^2.M^2.m / c^2.r^2$$

Para simplificar la notación hacemos:

$$\alpha = G.M.m$$
$$U = -\frac{\alpha}{r} - \frac{\alpha^2}{mc^2r^2} \qquad (6)$$

Es de remarcar que la aplicación de la relatividad especial mas la corrección relativista del potencial tiene una aplicación limitada porque no se tiene en cuenta la modificación del decurso del tiempo y sus efectos (que se verán mas adelante) en el entorno del cuerpo masivo.

Introduciendo en la integral de la trayectoria el potencial (6), queda

$$\phi = \int \frac{L.dr}{\sqrt{2m\frac{E^2}{c^2} + \frac{2m\alpha}{r}(1+\frac{E}{mc^2}) + (3\frac{\alpha^2}{c^2} - L^2)\frac{1}{r^2}}.r^2}$$

Denominando los términos

A = 2m.E²/c²
a = 2m α (1+ E/ m²)
b = 3 α ²/c² - L²

La integración conduce al resultado

$$\phi = \frac{L}{\sqrt{L - 3\alpha^2/c^2}}.\cos{-^1}\frac{2b + ar}{\sqrt{a^2 - 4Ab}.r}\,]_{r1}^{r2}$$

Los semiejes mayor y menor de la orbita [r_1 ;r_2], limites de la integral se obtienen de la condición de que en esos puntos de menor y mayor distancia a la fuente del campo gravitatorio toda la energía cinética es tangencial

Por otro lado vamos a considerar estos cálculos solo para pequeñas excentricidades de la orbita considerada

Entonces para hallar r_1 y r_2 teniendo en cuentas lo dicho comenzamos escribiendo la expresión para la energía total

$$Et = \sqrt{p^2c^2 + m^2c4}$$

$$(E - U + mc^2)^2 = \frac{L^2}{r^2}.c^2 + m^2c4$$

$$(E - U)^2 + 2mc^2(E - U) = \frac{L^2}{r^2}.c^2$$

Teniendo en cuenta la forma de U, podemos escribir:

$$E - U = E + \frac{\alpha}{r} + \frac{\alpha^2}{mc^2.r^2}$$

Operando resulta

$$E^2 + \frac{2E\alpha}{r} + \frac{2E\alpha^2}{mc^2.r^2} + \frac{\alpha^2}{r^2} + 2mc^2.E + 2mc^2\frac{\alpha}{r} + \frac{2\alpha^2}{r^2} = \frac{L^2}{r^2}.c^2$$

Se descartaron en este desarrollo los términos superiores a $1/r^2$, por su pequeñez. También puede suprimirse el término: $2E.\alpha^2/mc^2r^2 << \alpha^2/c^2$.

Ordenando los términos por potencias de (1/r) se obtiene:

$$(3\alpha^2/c^2 - L^2)\frac{1}{r^2} + \frac{2m\alpha}{r}(1 + E/mc^2) + 2mE + E^2/c^2 = 0$$

Resolviendo la ecuación para (1/r)

$$\frac{1}{r} = \frac{-a \pm \sqrt{a^2 - 4A.b}}{2b}$$

Introduciendo este valor de (1/r) en función arco coseno de la trayectoria

$$\cos^{-1}\left[\frac{2b}{\sqrt{a^2 - 4Ab}}\left(\frac{-a \pm \sqrt{a^2 - 4Ab}}{2b}\right) + \frac{a}{\sqrt{a^2 - 4Ab}}\right]$$

$$= \cos^{-1}(1) - \cos^{-1}(-1)$$
$$= \pi$$

Queda para el ángulo ϕ

$$\phi = \frac{\pi.L}{\sqrt{L^2 - 3\alpha^2/c^2}}$$

De acuerdo a que $3\alpha^2/c^2 << 1$

$$\phi \cong \pi\left(1 + \frac{3\alpha^2}{2c^2L^2}\right)$$

Este resultado difiere ligeramente la media vuelta para ϕ. Por vuelta completa la precesión del eje de la orbita representada por $\Delta\phi$

$$\Delta\phi = \frac{3\pi\alpha^2}{c^2L^2}$$

Para orbitas casi circulares:

$$v^2 = G.M/r$$

$$L^2 = m^2.(GM/r).r^2$$

$$\Delta\phi = 3\pi.\frac{GM}{c^2r}$$

Fuerza De Gravedad En Relatividad

Utilizamos el esquema de desintegración empleado para hallar el valor de la energía potencial a la determinación de la fuerza gravitatoria. En primera aproximación aplicamos la Ley de Gravitación de Newton

$$F = - G.M.m / r^2$$

La desintegración del cuerpo (m) en dos partes iguales de masa m^1, no puede variar la fuerza total ejercida sobre el sistema. De acuerdo a la relación masa-energía

$$m = \frac{2m^1}{\sqrt{1 - v^2 / c^2}}$$

$$F = -G \frac{M.2m^1}{r^2.\sqrt{1 - v^2 / c^2}.}$$

De modo genérico para un solo cuerpo:

$$F = - G.M.Et / c^2.r^2$$

Si comparamos esta expresión con la que se deriva para la energía potencial:

$$U = - G.M.Et / c^2 r$$

$$F = -\frac{dU}{dr} = \frac{GM}{c^2}\left(\frac{1}{r}.\frac{dEt}{dr} - \frac{Et}{r^2}\right)$$

Como se ve, existe una diferencia entre la expresión para la fuerza derivada de la energía potencial y la obtenida directamente a partir del mismo esquema. Es el término:

$$\frac{GM}{c^2}.\frac{1}{r}.\frac{dEt}{dr}$$

Para explicar esto, debemos tener en cuenta que al establecer la formula para la energía potencial el valor de la masa de la fuente M era una constante, una condición inicial fija. En cambio para determinar el valor de la fuerza debemos considerar que la masa de la fuente percibida por el objeto de prueba ya no es constante, sino que varia a lo largo del radio vector r), es función de la distancia a esta $M \rightarrow M(r)$

Esto ya fue visto para la masa de un cuerpo que si medida o percibida dentro del campo gravitatorio es m’, fuera de este será percibida como m<m’. Si la masa de la fuente que se percibe esta representada por la función M(r),a medida que se ingresa al campo gravitatorio $m' \equiv M(r)$

De acuerdo a lo ya establecido:

$$m' = m.(v' / v)$$

$$m' = m / (1 - GM / c^2 r)$$

El cuerpo m’ es una porción pequeña de la masa total M. Si extendemos esta relación a toda la masa de la fuente del campo gravitatorio:

$$M(r) = M/(1 - GM/c^2.r)$$

Para la energía potencial:

$$dU = G.\frac{M(r).Et}{c^2.r^2}.dr$$

$$dU = \frac{G}{c^2}.\frac{M.Et}{r^2(1 - GM/c^2r)}.dr$$

$$dU = - dEt$$

$$\int \frac{dEt}{Et} = -\frac{GM}{c^2}\int \frac{dr}{r^2 - GM.r/c^2}$$

$$\ln Et]_{Etr}^{Et\infty} = \ln \frac{r}{r - GM/c^2}]_r^{\infty}$$

$$\ln \frac{Et\infty}{Etr} = -\ln \frac{r}{r - GM/c^2}$$

$$\frac{Et\infty}{Etr} = \frac{r - GM/c^2}{r}$$

$$Etr = \frac{Et\infty}{1 - GM/c^2r}$$

Por definición la energía total en un punto determinado r la podemos escribir para este caso en la forma que sigue

$$Etr = Et\infty - U$$

Introduciendo este valor para Etr en la formula anterior:

$$Et\infty - U = \frac{Et\infty}{1 - GM/c^2r}$$

$$U = Et\infty - \frac{Et\infty}{1 - GM/c^2r}$$

$$U = Et\infty[1 - \frac{1}{1 - GM/c^2r}]$$

$$U = - (G.M/c^2)[\, Et\infty/(r - GM/c^2)\,]$$

Esta expresión es idéntica a la obtenida anteriormente para la energía potencial. De esta manera se explica la aparente contradicción entre los resultados hallados para la fuerza y el potencial en el esquema utilizado.

Queda para la fuerza gravitatoria para un cuerpo —en reposo— en relatividad:

$$F = G.M.m /(1 - GM/c^2r).r^2$$

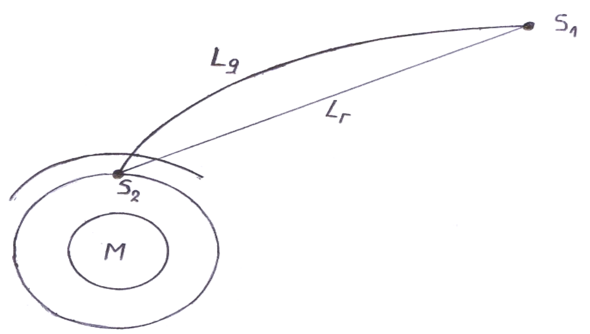
Siendo M la masa percibida según un sistema de referencia infinitamente alejado al cuerpo M

Trayectoria Temporal Mínima

La trayectoria temporal mínima entre dos puntos (geodésica) en el campo gravitatorio se define como aquella en la cual un rayo de luz o un cuerpo a velocidad dada tarda el mínimo de tiempo en ir y venir entre estos puntos medido según los observadores situados en los mismos puntos considerados .

Es la trayectoria que seguiría un cuerpo en forma inercial sin contar la fuerza de gravedad (Principio de Mínima Acción).

Para graficar representamos a continuación dos puntos [S^1 ; S^2], situados en el entorno de un cuerpo masivo M



Al transcurrir el tiempo de manera uniforme en ausencia del campo gravitatorio, la trayectoria temporal mínima entre los puntos S^1 y S^2 esta representada por la línea recta Lr que los une .En presencia del cuerpo masivo M el tiempo transcurre en forma más lenta en los niveles mas profundos hasta llegar al punto S^2. En este caso para llegar desde S^2 a S^1 en el menor tiempo medido en S^1 conviene en parte salir lo mas rápidamente posible de la región donde el tiempo transcurre mas lento, lo cual se consigue tomando al comienzo una dirección algo mas perpendicular a los círculos concéntricos equipotenciales a la fuente M de lo que lo hace la línea recta Lr.

Si el punto S^1 se considera infinitamente alejado de la fuente M, medirá un intervalo de tiempo propio que tendrá relación con el intervalo de tiempo transcurrido en recorrer la luz un segmento infinitesimal dL de la trayectoria que une los puntos [S^1;S^2], medido este tiempo en el punto r donde se encuentra dL

De acuerdo a lo ya establecido, la relación esta dada por:

$$dts^1 = dtr /(1 - GM/c^2r)$$

El intervalo dtr es el que emplea la luz en recorrer el segmento dL

$$dtr = dL/c$$

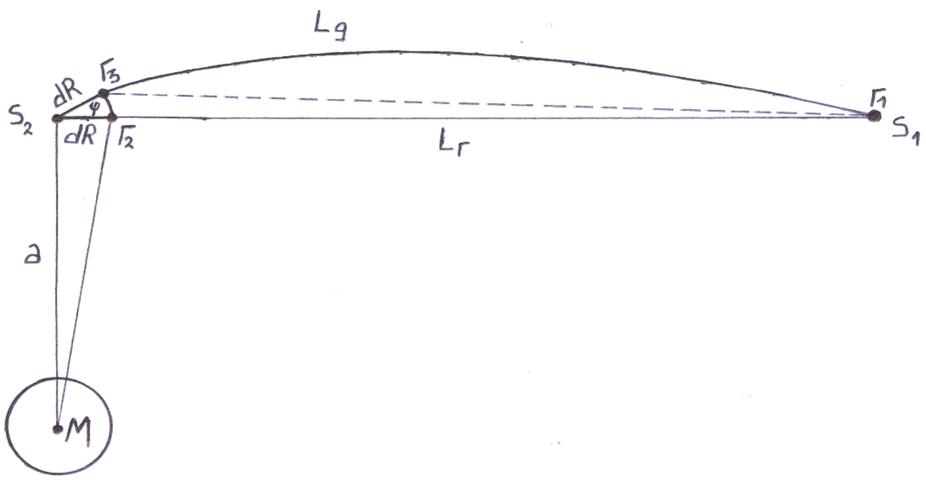
Y el tiempo total en llegar de S^2 a S^1, medido en S^1:

$$ts^1 = \frac{1}{c}.\int_{r1}^{r2} \frac{dL}{1 - GM/c^2 r}$$

Siendo L función de r, debe existir una función Lg tal que haga mínima la integral, tal función representa la llamada línea geodésica que une los puntos S^1 y S^2

Determinación de la linea geodesica

Para hallar la función que representa la geodésica entre dos puntos S^1, S^2 situados en el campo gravitatorio, recurrimos al grafico que sigue:



Un observador que se halla en el punto S^2 puede recorrer la distancia que lo separa al punto S^1 comenzando por el segmento infinitesimal dR perteneciente a la línea recta Lr, o por el segmento dR de la línea geodésica Lg que une S^2 con S^1.

Si el observador toma el segmento perteneciente a la geodésica, el tiempo que empleara luego en ir desde el punto r3 al punto r1 por la línea recta indicada con trazos, debe ser menor que el tiempo que tardaría en ir desde el punto r2 al r1 por la recta Lr, y debe ser el menor tiempo que para cualquier otra pendiente del segmento dR con respecto a la recta Lr.

De acuerdo a lo ya establecido, el tiempo empleado en ir entre los dos puntos r1; r2 por un rayo de luz esta dado por la integral:

$$ts_1 = \frac{1}{c}\int_{r2}^{r1} \frac{dL}{1-b/r}$$

Siendo b = GM/c²

Para la línea recta indicamos dL en base a la relación pitagórica

$$r = \sqrt{a^2 + L^2}$$
$$L = \sqrt{r^2 - a^2}$$
$$dL = \frac{r.dr}{\sqrt{r^2 - a^2}}$$

Siendo a el parámetro propio de la recta, la menor distancia a la que esta pasa del centro del cuerpo M.

Podemos escribir ahora:

$$ts_1 = \frac{1}{c}.\int_{r2}^{r1} \frac{r}{\sqrt{r^2 - a^2}}.\frac{dr}{(1-b/r)}$$

Al cambiar la recta elegida para ir de r2 a r1 por la recta que pasa por (r3;r1), varia tanto el limite inicial: r2→r3, como el parámetro de la recta: $a \rightarrow a_1$ .Para hallar la diferencia en los tiempos empleados en ir hasta el punto S¹ por ambas rectas derivamos la integral con respecto a la variable (r) y al parámetro a ,y sumamos para obtener el diferencial total.

Para valores pequeños de b puede escribirse:

$$ts_1 \cong \frac{1}{c}.\int_{r2}^{r1} \frac{r}{\sqrt{r^2 - a^2}}(1+\frac{b}{r}).dr$$
$$ts_1 \cong \frac{1}{c}.\int_{r2}^{r1} \frac{r.dr}{\sqrt{r^2 - a^2}} + \frac{b.dr}{\sqrt{r^2 - a^2}}$$

De acuerdo al grafico, con $a = cte$,al aumentar r en dr, ts1 decrece por lo cual corresponde el signo menos(-) al diferenciar con respecto a r.

Queda para el diferencial total la expresión:

$$dts_1 \cong \frac{1}{c}.\left[\frac{-r.dr}{\sqrt{r^2 - a^2}} + \int_{r2}^{r1} \frac{a.da.r.dr}{(r^2 - a^2)^{3/2}} - \frac{b.dr}{\sqrt{r^2 - a^2}} + \int_{r2}^{r1} \frac{b.a.da.dr}{(r^2 - a^2)^{3/2}}\right]$$

Los términos sin el factor relativista (b) representan la variación de la distancia (dL) al cambiar la recta que conduce a S¹.

Efectuando la integral de la derecha se obtiene:

$$dts_1 \cong \frac{1}{c}.\left[dL - \frac{b.dr}{\sqrt{r^2 - a^2}} - \frac{b.a}{a^2}\left(\frac{r}{\sqrt{r^2 - a^2}} \right)_{r2}^{r1}.da \right]$$

Para el caso de la mínima distancia del centro al infinito:

$$\begin{gathered} r_2 \to a \\ da \to dr \\ r_1 \to \infty \end{gathered}$$

$$dts_1 \cong \frac{1}{c}.\left[dL - \frac{b.dr}{\sqrt{r^2 - a^2}} - \frac{b}{a}.da + \frac{b.da}{\sqrt{r^2 - a^2}} \right]$$

$$dts_1 \cong \frac{1}{c}.\left(dL - \frac{b}{a}.da \right)$$

En el grafico la variación de la distancia al cambiar la recta que conduce al punto s¹, esta dada por:

dL = dR - cosφ .dR
dL = dR.(1 - cosφ)

El parámetro a :(si la distancia al centro es la menor: $r_2 \to a$)

$$da = sen\varphi.dR$$

Podemos escribir para dts_1

$$dts_1 \cong \frac{1}{c}\left[dR.(1 - \cos\varphi) - \frac{b}{a}.sen\varphi.dR \right]$$

Para hallar el ángulo que hace máxima la diferencia dts_1 , derivamos con respecto a φ e igualamos a cero

$$\frac{d}{d\varphi}(dts_1) = \frac{dR}{c}.\left(sen\varphi - \frac{b}{a}.\cos\varphi \right) = 0$$

Para que esta igualdad a cero se cumpla, el ángulo φ debe ser:

tg φ_{max} = b / a

Dado que trabajamos con valores pequeños de b y φ

$$\varphi_{max} \cong \frac{GM}{c^2 a} \qquad (7)$$

Este es el ángulo que forma el segmento dR perteneciente a la geodésica en el punto mas cercano al centro del cuerpo M con respecto a la recta que pasa por dicho punto perpendicularmente al segmento a.

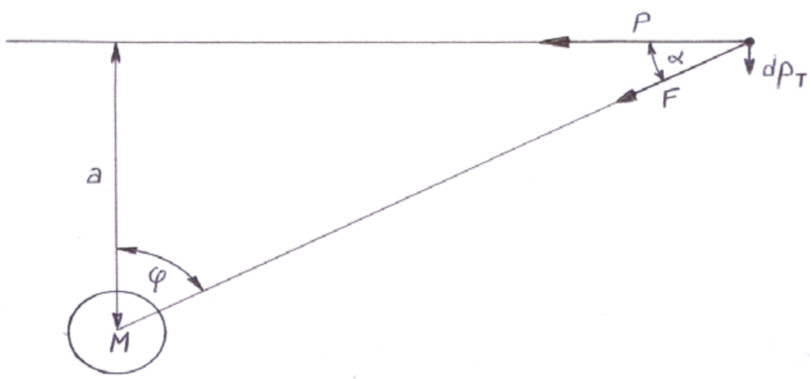
Es evidente que por simetría la variación total de ángulo al atravesar la geodésica el campo gravitatorio debe ser el doble a $\varphi_{\max}$

$$\varphi_{tot} = \frac{2GM}{c^2.r}$$

Deflexión de la luz en el campo gravitatorio

Consideramos que la desviación de la luz con respecto a la geodésica en un segmento dado, debe corresponder en el limite a la desviación de una partícula ultrarrelativista: cuando v→c.

De acuerdo al grafico y para pequeñas desviaciones puede escribirse:



$$dp_t = F.dt.sen\alpha$$

$$dt = \frac{dL}{c}$$

$$F = G.\frac{MEt}{c^2.r^2}$$

Para el fotón: $$Et = p.c$$

$$dp_t = \frac{GM}{c^2}.\frac{pc}{r^2}.\frac{dL}{c}.sen\alpha$$

$$dp_t = \frac{G.M.p}{c^2}.\frac{dL}{r^2}.sen\alpha$$

$$L = a.tg\varphi$$
$$dL = a.\sec^2\varphi.d\varphi$$
$$r = a.\sec\varphi.d\varphi$$

$$dp_t = \frac{G.M.p}{c^2.a}.\frac{a.\sec\varphi.d\varphi}{a^2.\sec^2\varphi}.sen\alpha$$

$$sen\alpha = \cos\varphi$$
$$dp_t = \frac{GM.P}{c^2.a}.\cos\varphi.d\varphi$$

$$\Delta p_t = \frac{GM.p}{c^2a}.\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos\varphi.d\varphi$$

$$\Delta p_t = \frac{2.GM.p}{c^2.a}\left[sen\varphi\right]_0^{\pi/2}$$

$$\Delta p_t = \frac{2.GM.p}{c^2.a}$$

El ángulo de desviación γ que produce la fuerza:

$$\gamma = \Delta p_t / p$$
$$\gamma = \frac{2GM}{c^2.a}$$

La suma de la desviación producida por la fuerza y por la trayectoria geodésica es la desviación total de la luz al atravesar el campo gravitatorio

$$\gamma_{tot} = \varphi_{tot} + \gamma$$

$$\gamma_{tot} = \frac{4.GM}{c^2.a}$$

Es el resultado observado experimentalmente

De acuerdo a la expresión (7), en relatividad surge una fuerza transversal a la dirección del movimiento de un cuerpo sin análogo clásico, esta fuerza cambia la dirección del modulo de la velocidad de una partícula en el campo gravitatorio, pero no su magnitud. Tal efecto es consecuencia de la aplicación del principio de mínima acción

Esta fuerza no es central, por lo tanto no conserva el momento de impulso de una partícula en el campo gravitatorio, de manera que se necesita desarrollar la teoría del movimiento correspondiente, lo cual es complicado, sin embargo para pequeñas masas de la fuente del campo, su influencia es aun menor que la primera corrección relativista que se uso para calcular la precesión del perihelio de las orbitas, para afirmarlo basta calcular no el valor exacto sino solo su orden de magnitud como se hace a continuación.

De acuerdo a la expresión (7),la desviación desde el infinito hasta una distancia r^o del centro del cuerpo masivo M

$$ø^o = GM/c^2r^o$$

Hasta una distancia $r^1 = r^o + \Delta r$

$$ø^1 = GM/c^2r^1$$

La diferencia ß entre ambas desviaciones

$$ß = (GM/c^2r^2).\Delta r$$

La fuerza F asociada a esta desviación

$$F = p.ß/t$$

Utilizando la expresión clásica para el impulso p = mv, valida para bajas velocidades orbitales.

El tiempo [t] en que el ángulo $ø^o$ varia a $ø^1$ es el cociente entre el arco $A=r.\Delta\theta$ y la velocidad tangencial (v) del cuerpo que orbita

$$t = r.\Delta\theta /v$$

Entonces queda para esta fuerza el valor de orden de magnitud:

$$F = (m.v)(GM/c^2r^2)\Delta r /(r\Delta\theta /v)$$
$$F = m(v^2/c^2)\ (GM /.r^3\ )(\Delta r/\Delta\theta)$$

Teniendo en cuenta que la velocidad orbital para una trayectoria con poca excentricidad es del orden de:

$$v^2 = GM/r$$

Queda para la fuerza

$$F = m\ (G^2M^2/c^2r^2)\ (\Delta r/r\Delta\theta)$$

De acuerdo a la formula, se ve que cuando menor sea la excentricidad de la elipse $(\Delta r/r)$, menor será la fuerza no central asociada y por tanto es valida la aplicación de la primera corrección de la formula relativista de la energía potencial en el calculo del los perihelios.

Rodolfo Hector CARABIO
rodolfohectorcarabio@yahoo.com.ar