# Propagación del Campo Electromagnético en el vacío. La invariancia con respecto a la transformación de Lorentz

## 01. Introducción

A finales del siglo XIX se daba por sentado que todas las leyes de la física habían de ser invariantes en una transformación de Galileo para sistemas inerciales, esto es, sistemas con desplazamiento relativo rectilíneo y uniforme.

Sin embargo, uno de los hechos que resultaban inexplicables en la época era que la ecuación de las ondas de D'Alembert (Jean le Rond D'Alembert, 1717-1783), y, en general, las ondas de propagación del campo electromagnético obtenidas desde las ecuaciones de Maxwell, no eran invariantes en una transformación de Galileo. Sin embargo, luego se comprobaría que sí lo eran en una transformación de Lorentz.

Sin son $(x_1, x_2, x_3, t)$, $(x_1', x_2', x_3', t')$ las coordenadas espaciales y el tiempo de un suceso observado desde el sistema K y el sistema K', respectivamente, ambos inerciales, las fórmulas de la transformación de Lorentz establecen que llamando

$$\varphi = \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}, \qquad \beta = \frac{v}{c}$$ , se tiene:

$$\begin{cases} x_1' = & \varphi(x_1 - \beta c.t) \\ x_2' = & x_2 \\ x_3' = & x_3 \\ t' = & \varphi\left(t - \frac{\beta}{c} x_1\right) \end{cases}$$ o bien, si $x_4 = ict$ : $$\begin{cases} x'_1 = & \varphi(x_1 + i\beta x_4) \\ x'_2 = & x_2 \\ x'_3 = & x_3 \\ x'_4 = & \varphi(x_4 - i\beta x_1) \end{cases}$$

Donde es v la velocidad uniforme del sistema K', a lo largo de la dirección del eje x, y c representa a la velocidad de la luz.

Tales expresiones, en la forma en que las encontró Lorentz, carecían de sentido físico alguno, por haber sido obtenidas, simplemente, como formulas que dejaban invariantes ecuaciones del electromagnetismo y de la óptica, hasta que fueron deducidas por Einstein (Albert Einstein, 1879-1955) a partir de principios inmediatos con base experimental. En esta misma web puede verse una demostración de las fórmulas de la Transformación de Lorentz en la dirección: (http://casanchi.com/fis/lorentz01.htm).

Lo que vamos a ver a continuación es que la propagación del campo electromagnético en el vacío, en ausencia de fuentes, obedece a ecuaciones de onda que tienen la misma estructura matemática que la ecuación de propagación ondulatoria de DÁlembert:

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x'^2_1} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x'^2_2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x'^2_3} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t'^2} = 0$$

y que, al aplicárseles a estas ecuaciones la transformación de Lorentz resultan tener la misma expresión en ambos sistemas inerciales, es decir, resultan ser invariantes en dicha transformación.

## 02. Transformación de Lorentz de cuadrivectores

De lo indicado antes se tiene que cualquier cuadrivector $(v_1, v_2, v_3, v_4)$ en un sistema K de referencia se expresa en otro sistema inercial K', mediante la transformación de Lorentz, de la forma:

$$\begin{cases} v'_1 = & \varphi(v_1 + i\beta v_4) \\ v'_2 = & v_2 \\ v'_3 = & v_3 \\ v'_4 = & \varphi(v_4 - i\beta v_1) \end{cases}$$

En particular, el cuadrioperador diferencial $D = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_3}, \frac{\partial}{\partial x_4}\right)$:

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial x'_1} = & \varphi\left(\frac{\partial}{\partial x_1} + i\beta\frac{\partial}{\partial x_4}\right) \\ \frac{\partial}{\partial x'_2} = & \frac{\partial}{\partial x_2} \\ \frac{\partial}{\partial x'_3} = & \frac{\partial}{\partial x_3} \\ \frac{\partial}{\partial x'_4} = & \varphi\left(\frac{\partial}{\partial x_4} - i\beta\frac{\partial}{\partial x_1}\right) \end{cases}$$

## 03. El operador dalembertiano

De la expresión de la ecuación de ondas de D'Alembert:

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial x'^2_1}+\frac{\partial^2\Phi}{\partial x'^2_2}+\frac{\partial^2\Phi}{\partial x'^2_3}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial t'^2}=0$$

que se puede representar por $\nabla^2\Phi-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2}=0$.

Llamamos *operador dalembertiano* a:

$$\Xi=\nabla^2-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}=\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}+\frac{\partial^2}{\partial x_3^2}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}$$

o bien, haciendo $x_4=ict$:

$$\Xi=\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}+\frac{\partial^2}{\partial x_3^2}+\frac{\partial^2}{\partial x_4^2}$$

lo que permite expresarlo como producto interior del cuadrioperador diferencial por sí mismo:

$$\Xi=\left(\frac{\partial}{\partial x_1},\frac{\partial}{\partial x_2},\frac{\partial}{\partial x_3},\frac{\partial}{\partial x_4}\right).\left(\frac{\partial}{\partial x_1},\frac{\partial}{\partial x_2},\frac{\partial}{\partial x_3},\frac{\partial}{\partial x_4}\right)$$

en definitiva, la ecuación de ondas de D'Alembert es

$$\Xi\Phi=0$$

## 04. Las ecuaciones de Maxwell

Las relaciones:

$$\vec{\nabla}.\vec{D}=\rho$$

$$\vec{\nabla}\wedge\vec{E}=-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$$

$$\vec{\nabla}\wedge\vec{H}=\vec{j}+\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}$$

$$\vec{\nabla}.\vec{B}=0$$

Se convierten, cuando el medio de propagación es el vacío, en

$$\vec{\nabla}.\vec{D} = \rho$$
$$\vec{\nabla} \wedge \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$
$$\vec{\nabla} \wedge \vec{H} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$
$$\vec{\nabla}.\vec{B} = 0$$

siendo $\vec{D} = \varepsilon_0.\vec{E},\ \vec{B} = \mu_0.\vec{H}$ , donde son $\varepsilon_0$ y $\mu_0$, respectivamente, las constantes permitividad dieléctrica y permeabilidad magnética del vacío, cuyos valores aproximados son

$$\varepsilon_0 = 8{,}8544.10^{-4}\ C^2.m^{-2}.N^{-1}$$
$$\mu_0 = 1{,}2566.10^{-6}\ n.kg.C^{-2}$$

verificando $\varepsilon_0.\mu_0 = 11{,}12643904.10^{-18}\ m^{-2}.s^2 \cong 1/(2{,}99793289.10^8)^2\ m^{-2}.s^{-2}$

en definitiva, $\varepsilon_0.\mu_0 = \dfrac{1}{c^2}$ (c: velocidad de la luz en el vacío)

## 05. Las ondas de propagación del campo electromagnético en el vacío

Si en la segunda ecuación de Maxwell aplicamos el rotacional a ambos miembros:

$$\vec{\nabla} \wedge \left(\vec{\nabla} \wedge \vec{E}\right) = -\vec{\nabla} \wedge \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \Rightarrow \vec{\nabla}(\vec{\nabla}.\vec{E}) - \vec{\nabla}^2 \vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t}\left(\vec{\nabla} \wedge \vec{B}\right)$$

y puesto que el gradiente de la divergencia es nulo, resulta, al sustituir la tercera ecuación:

$$-\vec{\nabla}^2 \vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t}\left(\vec{\nabla} \wedge \vec{B}\right) = -\mu_0 \frac{\partial}{\partial t}\left(\vec{\nabla} \wedge \vec{H}\right) = -\mu_0 \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}\right) = -\mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\right) = -\mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$$

por tanto, obtenemos la ecuación de las ondas de propagación del campo eléctrico:

$$\vec{\nabla}^2 \vec{E} - \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0 \Rightarrow \vec{\nabla}^2 \vec{E} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0$$

que, usando el operador dalembertiano, es $\Xi \vec{E} = 0$ , o bien:

$$\left(\Xi E_1, \Xi E_2, \Xi E_3\right) = 0$$

Análogamente obtenemos la ecuación de las ondas de propagación del campo magnético:

$$\vec{\nabla} \wedge \left( \vec{\nabla} \wedge \vec{H} \right) = \vec{\nabla} \wedge \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \Rightarrow \vec{\nabla}(\vec{\nabla}.\vec{H}) - \vec{\nabla}^2 \vec{H} = \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \left( \vec{\nabla} \wedge \vec{E} \right)$$

$$-\vec{\nabla}^2 \vec{H} = \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \left( \vec{\nabla} \wedge \vec{E} \right) = \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \left( -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right) = -\varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \right) = -\mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2}$$

resultando, por consiguiente, la misma ecuación de onda:

$$\vec{\nabla}^2 \vec{H} - \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2} = 0 \Rightarrow \vec{\nabla}^2 \vec{H} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2} = 0$$

que, también, es $\Xi \vec{H} = 0$ , o bien:

$$\left( \Xi H_1, \Xi H_2, \Xi H_3 \right) = 0$$

## 06. La invariancia del operador dalembertiano

De ser, en el sistema de referencia K':

$$\Xi' = \left( \frac{\partial}{\partial x'_1}, \frac{\partial}{\partial x'_2}, \frac{\partial}{\partial x'_3}, \frac{\partial}{\partial x'_4} \right) . \left( \frac{\partial}{\partial x'_1}, \frac{\partial}{\partial x'_2}, \frac{\partial}{\partial x'_3}, \frac{\partial}{\partial x'_4} \right)$$

y teniendo en cuenta

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial x'_1} = & \varphi \left( \dfrac{\partial}{\partial x_1} + i\beta \dfrac{\partial}{\partial x_4} \right) \\ \dfrac{\partial}{\partial x'_2} = & \dfrac{\partial}{\partial x_2} \\ \dfrac{\partial}{\partial x'_3} = & \dfrac{\partial}{\partial x_3} \\ \dfrac{\partial}{\partial x'_4} = & \varphi \left( \dfrac{\partial}{\partial x_4} - i\beta \dfrac{\partial}{\partial x_1} \right) \end{cases}$$

Se tiene la transformación siguiente:

$$\Xi' = \left( \varphi \left( \frac{\partial}{\partial x_1} + i\beta \frac{\partial}{\partial x_4} \right), \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_3}, \varphi \left( \frac{\partial}{\partial x_4} - i\beta \frac{\partial}{\partial x_1} \right) \right) . \left( \varphi \left( \frac{\partial}{\partial x_1} + i\beta \frac{\partial}{\partial x_4} \right), \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_3}, \varphi \left( \frac{\partial}{\partial x_4} - i\beta \frac{\partial}{\partial x_1} \right) \right)$$

o sea:

$$\Xi' = \frac{\partial^2}{\partial x'^2_1} + \frac{\partial^2}{\partial x'^2_2} + \frac{\partial^2}{\partial x'^2_3} + \frac{\partial^2}{\partial x'^2_4} =$$

$$= \varphi^2 \left( \frac{\partial}{\partial x_1} + i\beta \frac{\partial}{\partial x_4} \right)^2 + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} + \varphi \left( \frac{\partial}{\partial x_4} - i\beta \frac{\partial}{\partial x_1} \right)^2 = \varphi^2 \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \varphi^2 (i\beta)^2 \frac{\partial^2}{\partial x_4^2} + \varphi^2 2i\beta \frac{\partial}{\partial x_1} \frac{\partial}{\partial x_4} +$$

$$+ \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} + \varphi^2 \frac{\partial^2}{\partial x_4^2} + \varphi^2 (i\beta)^2 \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} - \varphi^2 2i\beta \frac{\partial}{\partial x_1} \frac{\partial}{\partial x_4} = \varphi^2 (1-\beta^2) \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} +$$

$$+ \varphi^2 (1-\beta^2) \frac{\partial^2}{\partial x_4^2} = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_4^2} = \Xi$$

Es decir, el operador dalembertiano tiene la misma expresión en ambos sistemas inerciales, K' y K:

$$\Xi' = \frac{\partial^2}{\partial x'^2_1} + \frac{\partial^2}{\partial x'^2_2} + \frac{\partial^2}{\partial x'^2_3} + \frac{\partial^2}{\partial x'^2_4} = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_4^2} = \Xi$$

## 07. La propagación del campo electromagnético en el vacío

De la invariancia del operador dalembertiano es inmediata la invariancia de la expresión de las ondas de propagación del campo eléctrico y del campo magnético en el vacío, en ambos sistemas K y K' inerciales:

Campo eléctrico:

$$\left( \Xi' E_1, \Xi' E_2, \Xi' E_3 \right) = 0 \Rightarrow \left( \Xi E_1, \Xi E_2, \Xi E_3 \right) = 0$$

Campo magnético:

$$\left( \Xi' H_1, \Xi' H_2, \Xi' H_3 \right) = 0 \Rightarrow \left( \Xi H_1, \Xi H_2, \Xi H_3 \right) = 0$$

## 08. Bibliografía:

**LANDAU, L. D., LIFSHITZ, E. M.,** Curso de Física Teórica, vol II (Teoría Clásica de los campos), Ed. Reverté, 1966, Barcelona.
**FERNÁNDEZ, H. A.,** Ecuaciones de Maxwell. Discusión conceptual de los postulados del electromagnetismo, 2008, http://casanchi.com/fis/ecuacionesmaxwell01.pdf
**CHINEA, C. S.,** Sobre la transformación de Lorentz, 2008, http://casanchi.com/fis/lorentz01.pdf
**CHINEA, C.S.,** Antecedentes de la Relatividad Restringida, 2002, http://casanchi.com/fis/relatividad01.htm