ÓPTICA DE FOURIER Y TRATAMIENTO ONDULATORIO DE LA ÓPTICA GEOMÉTRICA

Joaquín González Álvarez

El modelo ondulatorio de la luz es el que más se adecua al estudio de la óptica no cuántica y es el único utilizado para el tratamiento de fenómenos como los de difracción, interferencia y polarización. En gran parte de la literatura dedicada a la enseñanza de la Física general y experimental, al llegar al estudio de la óptica geométrica suele presentarse una ruptura en el desarrollo del discurso como si se tratara de un tema que prácticamente no está relacionado con el resto de la disciplina en cuestión. Por otra parte, en cursos mas avanzados, se hace un paso a la óptica geométrica a partir del modelo ondulatorio acudiendo mayormente al concepto y ecuación de la iconal, pero suele llegarse a ésta sin utilizarla para establecer algo que muestre explícitamente que se ha entrado en tópicos tratables por la ley de Sneel o al menos por el Principio de Fermat, dejando insatisfecho al estudioso que tiene por óptica geométrica la aplicación de las citadas formulaciones.

También se presenta la situación de que el estudiante interesado, encuentra en los medios, alusiones a temas como el procesamiento de imágenes, escucha hablar de *wavelets,* de uso de la transformada de Fourier en óptica, etc., sin que advierta vínculo alguno con lo que ha aprendido en sus estudios regulares. Y se da muy frecuentemente que oftalmólogos y optometristas reciben literatura especializada en la que encuentran referencias a aplicaciones de la Óptica de Fourier en oftalmología y optometría, sin que encuentren apropiados textos sobre esos temas en los que puedan ahondar sobre los mismos.

Tratando de atender aunque sea en forma lo mas elemental posible, al saludable interés intelectual al que nos hemos referido, se ha elaborado el presente trabajo.

En la Óptica de Fourier se estudian fenómenos de las ondas electromagnéticas y por tanto de las luminosas, haciendo un uso fundamental de la teoría de la Transformada de Fourier.

La transformada de Fourier es una aplicación que hace corresponder a una función f(x) de valores complejos de x, otra función $g(a)$ proporcional a

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x).\exp(-iax).dx$$

Veamos una aplicación al estudio de la intensidad luminosa en el patrón obtenido en la difracción de Fraunhofer. Para obtenerlo se hace incidir un haz paralelo de luz en una pantalla opaca con un hendidura muy fina la cual difracta la luz que después de ser refractada por una lente convergente forma el patrón en un plano situado a la distancia focal f de la lente llamado plano de Fourier. La intensidad luminosa $I(x',y')$ viene dada por el cuadrado de la transformada de Fourier de la función de transmisión $t(x,y)$ de la hendidura:

$$I(x',y') = \left[\iint_{\infty} t(x,y).\exp(-ik/f).(xx'+yy').dxdy \right]^2$$

donde x´ e y', coordenadas en plano de Fourier de los puntos que conforman el patrón los cuales son funciones de las frecuencias espaciales y de la longitud de onda λ, siendo $k=2\pi/\lambda$.

La trasformada inversa de Fourier de la correspondiente a la formación del patrón, producida por una segunda lente convergente, corresponderá a la de la formación de la imagen definitiva.

La óptica geométrica muestra que f, distancia focal de la lente convergente y las distancias s objeto-lente y s´ lente–imagen están relacionadas por la fórmula de Descartes

$$\frac{1}{s} + \frac{1}{s'} = \frac{1}{f}$$

en cuya aplicación no se tiene en cuenta para nada la formación del patrón en el plano de Fourier. No fue hasta finales del siglo XIX y principios del XX que Abbe y Porter descubren la intervención del patrón en la formación de la imagen final al aplicarse el principio de Huygens-Fresnel en el proceso. La aplicación de la teoría de Abbe-Porter y la Óptica de Fourier ha permitido implementar métodos de filtrado de frecuencias en el plano de Fourier, colocando en el mismo dispositivos como rejillas que eliminen frecuencias perturbadoras de la calidad de la imagen. Las posibilidades de la computación y los avances teóricos de la Óptica de Fourier, de los procedimientos basados en las *wavelets*, de los fractales, etc., han propiciado un notable progreso en el campo del tratamiento de imágenes.

El otro punto que vamos a tratar, como indicamos en el comienzo de este trabajo, se refiere a la introducción de la formulación propia de la óptica geométrica a partir de la óptica ondulatoria. Para ello, partimos de la ecuación de las ondas electromagnéticas puesto que electromagnética es la naturaleza de la luz:

$$\Delta u = \left(\frac{n}{c}\right)^2 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

(consideramos ondas planas en la aproximación de la óptica geométrica, $\lambda \to 0$)

cuya solución es:

$$u = A.\exp\left[i.(\vec{k}.\vec{r} - \omega.t)\right] \qquad (1)$$

donde $\vec{k}$ vector de onda (módulo $2\pi/\lambda$) y $\vec{r}$ vector normal a la superficie de onda con ángulos directores α y β, pues nos limitaremos a la representación gráfica en el llamado plano de incidencia, con lo cual tendremos:

$$\vec{k}.\vec{r} = k_0.n.(x.\cos\alpha + y.\cos\beta) \qquad (2)$$

donde n es el índice de refracción.

Hacemos

$$L = n.(x.\cos\alpha + y.\cos\beta) \qquad (3)$$

A L se le denomina camino óptico o iconal y si nos fijamos en la ec.(1) notamos que (2) es la fase de la onda y que (1) la podemos escribir así:

$$u = A.\exp(-i(\omega.t - k_0.L))$$

Con las suposiciones que en aras del mejor entendimiento hemos realizado faltando un tanto al rigor pero no a la descripción física, podemos observar que $\vec{r}$ nos señala la dirección del rayo perpendicular a la fase que es como decir a la superficie de onda dada por la función escalar L, de manera que el gradiente de esa función $\vec{\nabla}L$, nos dará el desplazamiento en la dirección del rayo, de la superficie de onda.

Se cumplirá pues que:

$$\vec{\nabla}L = n.(\vec{i}.\cos\alpha + \vec{j}.\cos\beta)$$

y por tanto:

$$(\vec{\nabla}L)^2 = n^2$$

que es la ecuación de la iconal, a la que suele llamarse ecuación fundamental de la óptica geométrica.

Resulta interesante indicar aquí que en 1824 William R. Hamilton a partir de un hallazgo teórico en óptica similar a la ecuación de la iconal, introdujo en la mecánica el concepto de lo que llamamos acción S utilizando la igualdad $p^2 = 2m.(H - E)$ donde H=E energía total, permitió establecer:

$$\left(\vec{\nabla}S\right)^2 = 2m.(H - E)$$

que como vemos pude escribirse

$$\left(\vec{\nabla}S\right)^2 = p^2$$

que muestra la analogía con la ecuación de la iconal y es la ecuación de Hamilton-Jacobi, fundamental en la denominada Mecánica Hamiltoniana y a partir de la cual se puede conformar la ecuación de Schrödinger de la Mecánica Cuántica sustituyendo por su operador $(-ih/2\pi)\nabla$ donde h es la constante de Plank.

Volvamos a la ecuación de la iconal. Para el caso de una propagación del rayo según el eje X o sea para α valiendo cero grados y β noventa, con x como única componente de $\vec{r}$, se tendrá que por la ecuación de la iconal:

$$dL/dx = n \quad \text{y} \quad L = \int_A^B n.dx$$

expresión del camino óptico para un caso particular que nos permitirá didácticamente en lo que sigue aplicar el Principio de Fermat a la deducción de la ley de Snell y evidenciar la formulación de la óptica geométrica partiendo de la óptica ondulatoria.

El Principio de Fermat es una derivación del Principio de Maupertuis el cual es mas general. Este último puede expresarse así:

$$\delta\int_A^B p.dl = 0 \qquad (1)$$

donde δ es el signo de variación, $p = mv$, momento y dl el elemento de longitud de la trayectoria. Mediante (1) se determina la trayectoria del cuerpo cuyo momento es p en su movimiento desde A hasta B.

El Principio de Fermat, resulta de la adecuación del Principio de Maupertuis a la determinación de la marcha de la luz en Óptica Geométrica. Para ello se considera la naturaleza corpuscular o cuántica de la luz según la cual a los cuantos de luz o fotones se le asigna la llamada longitud de onda de De Broglie:

$$\lambda = h / p \text{ y por tanto } p = h / \lambda \qquad (2)$$

donde h es la constante de Planck.

A todo medio de propagación de la luz la corresponde un índice de refracción

$$n = c / v \qquad (3)$$

donde c velocidad de la luz en el vacío y v la velocidad de la luz en el medio que se trate. Se tiene además que

$$v = \lambda u \quad (4)$$

donde u es la frecuencia de la luz. Poniendo (4) en (3):

$$n = c / \lambda u \qquad (5)$$

multiplicando por h numerador y denominador en (5):

$$n = h.c / \lambda hu \qquad (6)$$

y por (2) y por ser $hu = E$, energía del fotón, se tiene por (6)

$$n = c.p / E \quad \text{por tanto} \quad p = n.E / c \qquad (7)$$

lo que puesto en (1):

$$\delta\int nE / c.dl = 0$$

y como E / c es constante se tendrá:

$$\delta\int n.dl = 0 \qquad (8)$$

que es el Principio de Fermat.

Existen diferentes procedimientos de iniciar el tratamiento de ls Óptica Geométrica tomando como punto de partida distintos principios que alternativamente pueden servir de basamento teórico.

Algunos de esos principios pueden utilizarse en cursos de la enseñanza media general o en estudios universitarios que no siendo de Física, de Optometría o de Ingeniería, requieran de algún conocimiento de Óptica, como pueden ser las especialidades de Biología, Química u otras similares.

Como ejemplo de esos presupuestos teóricos está el Teorema de Malus el cual en una variante elemental de nuestra autoría, puede utilizarse en los casos antes mencionados. El Teorema de Malus de la Óptica Geométrica (no confundirlo con la Ley de Malus de la Óptica Ondulatoria) expresa en síntesis que un haz de rayos perpendiculares a una superficie de onda permanecerá perpendicular a una superficie de onda después de experimentar cualquier número de refracciones o reflexiones.

Otro principio que puede servir de base teórica en el tema que nos ocupa, es el de Huygens. Este principio, por cierto el mas utilizado, considera que cada punto de un frente de onda puede considerarse como un foco emisor de ondículas la envolvente de las cuales conformará el siguiente frente. De un defecto evidente de este aserto volveremos a ocuparnos mas adelante. En (8) a $\int n\, dl$ se le llama longitud óptica por lo cual el Principio de Fermat se puede enunciar así: "La longitud óptica entre un punto A y un punto B tiene un valor estacionario". Sabido es que en cálculo de variaciones estacionario significa máximo o mínimo, pero la práctica óptica sólo se tiene en cuenta el significado de mínimo.

Veamos la comprobación del Principio de Fermat en el caso sencillo de un rayo de luz que se refracta al pasar de un medio isótropo de índice de refracción n' a otro de índice n''.

Tomemos como plano de incidencia el del papel. Situemos en él los ejes coordenados XY tomando el eje X como la representación de la superficie de separación de los dos medios y al Y como la normal en el origen O(0,0) de coordenadas que será el punto de incidencia del rayo que estudiamos. Ese rayo sale del punto A(-x,a) en el segundo cuadrante, llega a O donde se refracta desviándose hacia la normal y llega hasta el punto B(d-x,-b). Sea i el ángulo de incidencia (el de AO con la normal) y r el de refracción (el de OB con la normal). En el punto A, el segmento AO forma también el ángulo i con la vertical que pasa por A, y en el punto B, el segmento BO forma un ángulo r con la vertical que pasa por B.

Por el teorema de Pitágoras:

$$AO = \sqrt{a^2 + x^2}$$

$$OB = \sqrt{b^2 + (d - x)^2}$$

La longitud óptica la obtendremos dando los siguientes pasos:

$$n.l = n'.AO + n''.OB$$

Poniendo en esta igualdad los valores obtenidos para AO y OB y diferenciando se obtiene:

$$n.dl = \left(\frac{n'.x}{\sqrt{a^2 + x^2}} - \frac{n''.(d-x)}{\sqrt{b^2 + (d-x)^2}} \right).dx$$

Nos damos cuenta que en la igualdad anterior, el factor que multiplica a n' es igual a $seni$ y el que multiplica a n'' es igual a $senr$, por tanto, realizando estas sustituciones e integrando en ambos miembros en la igualdad anterior, se tiene:

$$\int n.dl = \int \left(n'.seni - n''.senr \right).dx$$

Pero por la ley de Snell, $n'.seni = n''.senr$ por lo que:

$$\int n.dl = 0$$

y en consecuencia:

$$\delta \int n.dl = 0$$

con lo cual se comprueba el Principio de Fermat (8).

Desde el punto de vista didáctico, debemos apuntar que el Principio de Fermat puede utilizarse para que dándolo como conocido, o deduciéndolo como hicimos al principio de este trabajo, a partir de él deducir la ley de Snell. Este método será mas adecuado que el muy utilizado para deducir la ley de Snell mediante el Principio de Huyghens dado el inconveniente que éste presenta de no poder justificar el hecho de que el frente de onda sólo se propague en el sentido que avanza el rayo.

Conclusiones

Se ha visto la aplicación de la Óptica de Fourier a la formación de imágenes mediante lentes teniendo en cuenta la teoría de Abbe-Porter. Y hemos presentado una forma que, aunque a un nivel no muy alto en el uso de las matemáticas, puede emplearse para introducir la "Óptica Geométrica" en los cursos de Física General de los primeros años de las carreras de Física y de Ingeniería.

Bibliografía

González A. J, E. Moltó et alt. Öptica. Pueblo y Educación. La Habana. 1984.
Serway, R., J. Jewett. Physics for Scientists and Engineers. Thomson Brooks/Cole. Belmont. 2004.
Tippens,P. Física, Conceptos y Aplicaciones. McGraw-Hill.New York. 2001.

Joaquín GONZÁLEZ ÁLVAREZ
j.gonzalez.a@hotmail.com