

Partículas en un campo electromagnético. Transformación del Lorentz de los vectores campo eléctrico y campo magnético.

1. PARTÍCULAS EN UN CAMPO ELECTROMAGNÉTICO

1.1. Cuadripotencial de un campo

Al considerar la situación de una partícula inmersa en el contexto de un campo, los datos experimentales nos muestran que la forma de interacción de la partícula con el campo viene determinada por su carga, q , y, asimismo, la forma de interacción del campo con la materia viene determinada por un cuadrivector, A_i , dependiente de las coordenadas y del tiempo, que llamaremos cuadripotencial del campo y que aparecería en la expresión de la acción mediante un término aditivo de la forma

$$\frac{q}{c} \int_a^b A_i \cdot dx_i$$

(la constante c se ha añadido por conveniencia, a fin de homogeneizar las fórmulas)

Entonces, se tiene:

- Acción de una partícula libre

$$S = \int_a^b (-mc \cdot ds)$$

- Acción de una partícula en un campo electromagnético:

$$S = \int_a^b \left(-mc \cdot ds + \frac{q}{c} A_i \cdot dx_i \right)$$

(siendo $ds = \sqrt{-dx_i^2}$ el intervalo diferencial)

Si llamamos *potencial vectorial* al vector de componentes las tres primeras componentes del cuadripotencial y *potencial escalar* a la cuarta componente multiplicada por la unidad imaginaria de los números complejos y signo opuesto:

- Potencial vectorial: $\vec{A} = (A_1, A_2, A_3)$

- Potencial escalar: $\phi = -i \cdot A_4$

1.2. Expresión de la acción en función del cuadripotencial:

En función de los potenciales vectorial y escalar, y sustituyendo la expresión del intervalo diferencial, se puede escribir la acción en la forma siguiente:

$$\begin{aligned}
 S &= \int_a^b -mc \cdot \frac{ds}{dt} dt + \frac{q}{c} \int_a^b (A_1 dx_1 + A_2 dx_2 + A_3 dx_3) + A_4 dx_4 = \\
 &= \int_a^b \left(-mc \cdot \frac{\sqrt{-(dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 + dx_4^2)}}{dt} dt \right) + \frac{q}{c} \int_a^b \left((A_1 \cdot \frac{dx_1}{dt} + A_2 \cdot \frac{dx_2}{dt} + A_3 \cdot \frac{dx_3}{dt}) dt + (i\phi) \cdot (icdt) \right) = \\
 &= \int_a^b -mc \sqrt{-\left(\frac{dx_1}{dt}\right)^2 - \left(\frac{dx_2}{dt}\right)^2 - \left(\frac{dx_3}{dt}\right)^2 + c^2} dt + \frac{q}{c} \int_a^b (\vec{A} \cdot \vec{v} - c\phi) dt = \\
 &= \int_a^b -mc \sqrt{-\vec{v}^2 + c^2} dt + \frac{q}{c} \int_a^b (\vec{A} \cdot \vec{v} - c\phi) dt = \\
 &= -mc^2 \int_a^b \sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2} dt + \int_a^b \left(\frac{q}{c} \vec{A} \cdot \vec{v} - q\phi \right) dt = \int_a^b \left(-mc^2 \sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2} + \frac{q}{c} \vec{A} \cdot \vec{v} - q\phi \right) dt
 \end{aligned}$$

2. ECUACIONES DEL MOVIMIENTO. FUERZA DE LORENTZ

2.1. Ecuaciones del movimiento. Notación vectorial:

Del resultado anterior, $S = \int_a^b \left(-mc^2 \sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2} + \frac{q}{c} \vec{A} \cdot \vec{v} - q\phi \right) dt$, y siendo $S = \int_a^b L dt$

(L Lagrangiana), se tiene:

Expresión de la Lagrangiana

$$L = -mc^2 \sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2} + \frac{q}{c} \vec{A} \cdot \vec{v} - q\phi$$

y las ecuaciones de Lagrange

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \vec{v}} \right) = \left(\frac{\partial L}{\partial \vec{r}} \right)$$

Calculemos:

$$\begin{aligned}
 \text{- Miembro izquierda: } \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \vec{v}} \right) &= \frac{d}{dt} \left(\frac{-mc^2 \cdot 2 \frac{\vec{v}}{c} \cdot \frac{1}{c}}{2 \sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} + \frac{q}{c} \vec{A} \right) = \frac{d}{dt} \left(\frac{mv}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} \right) + \frac{q}{c} \frac{d\vec{A}}{dt} = \\
 &= \frac{d\vec{p}}{dt} + \frac{q}{c} \left(\frac{\partial \vec{A}}{\partial \vec{r}} \frac{d\vec{r}}{dt} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) = \frac{d\vec{p}}{dt} + \frac{q}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + \frac{q}{c} \vec{\nabla} \cdot \vec{A} \vec{v}
 \end{aligned}$$

$$\text{- Miembro derecha: } \left(\frac{\partial L}{\partial \vec{r}} \right) = \vec{\nabla} L = \frac{q}{c} \vec{\nabla} (\vec{A} \cdot \vec{v}) - q \vec{\nabla} \phi, \text{ pero siendo}$$

$$\vec{\nabla}(\vec{A} \cdot \vec{v}) = (\vec{A} \cdot \vec{\nabla} \vec{v}) + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla} \vec{A}) + \vec{v} \wedge (\vec{\nabla} \wedge \vec{A}) + \vec{A} \wedge (\vec{\nabla} \wedge \vec{v}) = 0 + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla} \vec{A}) + \vec{v} \wedge (\vec{\nabla} \wedge \vec{A}) + 0$$

se tiene entonces, igualando ambos miembros:

$$\frac{d\vec{p}}{dt} + \frac{q}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + \frac{q}{c} \vec{\nabla} \vec{A} \cdot \vec{v} = \frac{q}{c} (\vec{v} \cdot \vec{\nabla} \vec{A}) + \frac{q}{c} \vec{v} \wedge (\vec{\nabla} \wedge \vec{A}) - q \vec{\nabla} \phi$$

y al simplificar:

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = -\frac{q}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + \frac{q}{c} \vec{v} \wedge (\vec{\nabla} \wedge \vec{A}) - q \vec{\nabla} \phi$$

al separar los sumandos que son factores de la carga y los que lo son también de la velocidad, se tendrá:

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = q \left(-\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \vec{\nabla} \phi \right) + \frac{q}{c} \vec{v} \wedge (\vec{\nabla} \wedge \vec{A})$$

llamando $\vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \vec{\nabla} \phi$, $\vec{H} = \vec{\nabla} \wedge \vec{A}$, se tiene: $\frac{d\vec{p}}{dt} = q\vec{E} + \frac{q}{c} \vec{v} \wedge \vec{H}$

que es la expresión conocida como "Fuerza de Lorentz":

$$\vec{f} = q\vec{E} + \frac{q}{c} \vec{v} \wedge \vec{H}$$

Los vectores \vec{E}, \vec{H} son el *campo eléctrico* y el *campo magnético*, respectivamente.

Para velocidades pequeñas respecto de la velocidad c de la luz, el impulso \vec{p} tiene por expresión la conocida $\vec{p} = m \cdot \vec{v}$, quedando:

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = q\vec{E} + \frac{q}{c} \vec{v} \wedge \vec{H}$$

2.2. Ecuaciones del movimiento. Notación tensorial:

Aplicamos el Principio de Mínima Acción (la variación virtual de la acción es nula en el movimiento real):

$$\delta S = \delta \int_a^b \left(-mc \cdot ds + \frac{q}{c} A_i \cdot dx_i \right) = 0$$

Es decir: $\int_a^b (-mc \delta ds + \frac{q}{c} \delta(A_i dx_i)) = \int_a^b (-mc \delta ds + \frac{q}{c} \delta A_i dx_i + \frac{q}{c} A_i \delta dx_i) = 0$

y siendo $\delta ds = \delta \sqrt{-dx_i^2} = \frac{-2dx_i \delta dx_i}{2\sqrt{-dx_i^2}} = -\frac{dx_i}{ds} \delta dx_i = -u_i \delta dx_i$, se tiene, al sustituir:

$$\int_a^b \left((mc u_i + \frac{q}{c} A_i) \delta dx_i + \frac{q}{c} \delta A_i dx_i \right) = 0$$

integramos por partes el primer sumando:

$$\int_a^b (m c u_i + \frac{q}{c} A_i) d\delta x_i = \left[(m c u_i + \frac{q}{c} A_i) \delta x_i \right]_a^b - \int_a^b (m c d u_i + \frac{q}{c} d A_i) \delta x_i = 0 - \int_a^b (m c d u_i + \frac{q}{c} d A_i) \delta x_i$$

El término entre los dos límites es cero por tratarse de límites fijos ($\delta x_i|_a = \delta x_i|_b = 0$)

En resumen, queda:

$$\int_a^b \left(-m c d u_i - \frac{q}{c} d A_i \right) \delta x_i + \frac{q}{c} \delta A_i d x_i = 0$$

$$\text{y siendo } d A_i = \frac{\partial A_i}{\partial x_k} d x_k, \quad \delta A_i = \frac{\partial A_i}{\partial x_k} \delta x_k : \int_a^b \left(-m c d u_i \delta x_i - \frac{q}{c} \frac{\partial A_i}{\partial x_k} d x_k \delta x_i + \frac{q}{c} \frac{\partial A_i}{\partial x_k} \delta x_k d x_i \right) = 0$$

intercambiamos entre sí los subíndices mudos del tercer sumando:

$$\begin{aligned} & \int_a^b \left(-m c d u_i \delta x_i - \frac{q}{c} \frac{\partial A_i}{\partial x_k} d x_k \delta x_i + \frac{q}{c} \frac{\partial A_k}{\partial x_i} \delta x_i d x_k \right) = \\ & = \int_a^b \left(-m c \frac{d u_i}{d s} \delta x_i d s - \frac{q}{c} \frac{\partial A_i}{\partial x_k} \frac{d x_k}{d s} d s \delta x_i + \frac{q}{c} \frac{\partial A_k}{\partial x_i} \delta x_i \frac{d x_k}{d s} d s \right) = \\ & = \int_a^b \left(-m c \frac{d u_i}{d s} + \frac{q}{c} \left(\frac{\partial A_k}{\partial x_i} - \frac{\partial A_i}{\partial x_k} \right) \frac{d x_k}{d s} \right) d s \delta x_i = 0 \end{aligned}$$

Por ser arbitrarias las δx_i , será: $-m c \frac{d u_i}{d s} + \frac{q}{c} \left(\frac{\partial A_k}{\partial x_i} - \frac{\partial A_i}{\partial x_k} \right) \frac{d x_k}{d s} = 0$. En definitiva, se

tiene, llamando $F_{ik} = \frac{\partial A_k}{\partial x_i} - \frac{\partial A_i}{\partial x_k}$:

$$m c \frac{d u_i}{d s} = \frac{q}{c} F_{ik} u_k, \quad i = 1, 2, 3, 4$$

(ecuaciones del movimiento)

El tensor $F_{ik} = \frac{\partial A_k}{\partial x_i} - \frac{\partial A_i}{\partial x_k}$ se llama *Tensor Campo electromagnético*. Es, obviamente, un tensor antisimétrico de segundo orden.

3. TRANSFORMACION DE LORENTZ DEL CAMPO

3.1. Expresión de los vectores campo eléctrico y campo magnético en función de las componentes del tensor campo electromagnético:

- El vector campo eléctrico, $\vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \vec{\nabla} \phi$. Componentes:

$$E_1 = -\frac{1}{c} \frac{\partial A_1}{\partial t} - \frac{\partial \phi}{\partial x_1} = -\frac{i c}{c} \frac{\partial A_1}{\partial x_4} - \frac{1}{i} \frac{\partial A_4}{\partial x_1} = -i \frac{\partial A_1}{\partial x_4} + i \frac{\partial A_4}{\partial x_1} = i \left(\frac{\partial A_4}{\partial x_1} - \frac{\partial A_1}{\partial x_4} \right) = i F_{14}$$

$$E_2 = -\frac{1}{c} \frac{\partial A_2}{\partial t} - \frac{\partial \phi}{\partial x_2} = -\frac{ic}{c} \frac{\partial A_2}{\partial x_4} - \frac{1}{i} \frac{\partial A_4}{\partial x_2} = -i \frac{\partial A_2}{\partial x_4} + i \frac{\partial A_4}{\partial x_2} = i \left(\frac{\partial A_4}{\partial x_2} - \frac{\partial A_2}{\partial x_4} \right) = iF_{24}$$

$$E_3 = -\frac{1}{c} \frac{\partial A_3}{\partial t} - \frac{\partial \phi}{\partial x_3} = -\frac{ic}{c} \frac{\partial A_3}{\partial x_4} - \frac{1}{i} \frac{\partial A_4}{\partial x_3} = -i \frac{\partial A_3}{\partial x_4} + i \frac{\partial A_4}{\partial x_3} = i \left(\frac{\partial A_4}{\partial x_3} - \frac{\partial A_3}{\partial x_4} \right) = iF_{34}$$

por tanto:

$$\vec{E} = i(F_{14}, F_{24}, F_{34})$$

- El vector campo magnético, $\vec{H} = \vec{\nabla} \wedge \vec{A}$. Componentes:

$$H_1 = \frac{\partial A_3}{\partial x_2} - \frac{\partial A_2}{\partial x_3} = F_{23}$$

$$H_2 = \frac{\partial A_1}{\partial x_3} - \frac{\partial A_3}{\partial x_1} = F_{31}$$

$$H_3 = \frac{\partial A_2}{\partial x_1} - \frac{\partial A_1}{\partial x_2} = F_{12}$$

por tanto:

$$\vec{H} = (F_{23}, F_{31}, F_{12})$$

- El tensor campo electromagnético expresado con las componentes de los vectores campo:

$$(F_{ik}) = \begin{pmatrix} 0 & H_3 & -H_2 & -iE_1 \\ -H_3 & 0 & H_1 & -iE_2 \\ H_2 & -H_1 & 0 & -iE_3 \\ iE_1 & iE_2 & iE_3 & 0 \end{pmatrix}$$

(Tensor de segundo orden antisimétrico)

3.2. Transformación de Lorentz del tensor campo electromagnético:

La transformación de coordenadas de Lorentz es

$$\begin{cases} x_1' = \varphi(x_1 + i\beta x_4) \\ x_2' = x_2 \\ x_3' = x_3 \\ x_4' = \varphi(x_4 - i\beta x_1) \end{cases}, \quad \text{siendo } \varphi = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}, \quad \beta = \frac{v}{c}$$

Puesto que un tensor de segundo orden se transforma como un producto de coordenadas, es decir, F_{jk} , se transforma como el producto de las coordenadas

$x_j \cdot x_k$, y teniendo en cuenta que, en el caso del tensor campo electromagnético, este es antisimétrico, lo que implica que $x_i \cdot x_i = 0$ (pues $F_{ii} = 0$), $i = 1, 2, 3, 4$, y que $x_i \cdot x_k = -x_k \cdot x_i$ (pues $F_{ik} = -F_{ki}$), $x_i \neq x_k$, se tendrá:

$$\begin{aligned} x'_1 \cdot x'_1 &= \varphi(x_1 + i\beta x_4) \cdot \varphi(x_1 + i\beta x_4) = \varphi^2(x_1 \cdot x_1 + i\beta x_1 \cdot x_4 + i\beta x_4 \cdot x_1 - \beta^2 x_4 \cdot x_4) = \\ &= \varphi^2(0 + i\beta x_1 \cdot x_4 - i\beta x_1 \cdot x_4 + 0) = 0 \end{aligned}$$

$$x'_1 \cdot x'_2 = \varphi(x_1 + i\beta x_4) \cdot x_2 = \varphi(x_1 \cdot x_2 + i\beta x_4 \cdot x_2)$$

$$x'_1 \cdot x'_3 = \varphi(x_1 + i\beta x_4) \cdot x_3 = \varphi(x_1 \cdot x_3 + i\beta x_4 \cdot x_3)$$

$$\begin{aligned} x'_1 \cdot x'_4 &= \varphi(x_1 + i\beta x_4) \cdot \varphi(x_4 - i\beta x_1) = \varphi^2(x_1 \cdot x_4 - i\beta x_1 \cdot x_1 + i\beta x_4 \cdot x_4 + \beta^2 x_4 \cdot x_1) = \\ &= \varphi^2(x_1 \cdot x_4 - 0 + 0 - \beta^2 x_1 \cdot x_4) = \varphi^2((1 - \beta^2)x_1 \cdot x_4) = \frac{1 - (v/c)^2}{1 - (v/c)^2} x_1 \cdot x_4 = x_1 \cdot x_4 \end{aligned}$$

$$x'_2 \cdot x'_1 = x_2 \cdot \varphi(x_1 + i\beta x_4) = \varphi(x_2 \cdot x_1 + i\beta x_2 \cdot x_4)$$

$$x'_2 \cdot x'_2 = x_2 \cdot x_2 = 0$$

$$x'_2 \cdot x'_3 = x_2 \cdot x_3$$

$$x'_2 \cdot x'_4 = x_2 \cdot \varphi(x_4 - i\beta x_1) = \varphi(x_2 \cdot x_4 - i\beta x_2 \cdot x_1)$$

$$x'_3 \cdot x'_1 = x_3 \cdot \varphi(x_1 + i\beta x_4) = \varphi(x_3 \cdot x_1 + i\beta x_3 \cdot x_4)$$

$$x'_3 \cdot x'_2 = x_3 \cdot x_2$$

$$x'_3 \cdot x'_3 = x_3 \cdot x_3 = 0$$

$$x'_3 \cdot x'_4 = x_3 \cdot \varphi(x_4 - i\beta x_1) = \varphi(x_3 \cdot x_4 - i\beta x_3 \cdot x_1)$$

$$\begin{aligned} x'_4 \cdot x'_1 &= \varphi(x_4 - i\beta x_1) \cdot \varphi(x_1 + i\beta x_4) = \varphi^2(x_4 \cdot x_1 + i\beta x_4 \cdot x_4 - i\beta x_1 \cdot x_1 + \beta^2 x_1 \cdot x_4) = \\ &= \varphi^2(x_4 \cdot x_1 - 0 + 0 - \beta^2 x_4 \cdot x_1) = \varphi^2((1 - \beta^2)x_4 \cdot x_1) = \frac{1 - (v/c)^2}{1 - (v/c)^2} x_4 \cdot x_1 = x_4 \cdot x_1 \end{aligned}$$

$$x'_4 \cdot x'_2 = \varphi(x_4 - i\beta x_1) \cdot x_2 = \varphi(x_4 \cdot x_2 - i\beta x_1 \cdot x_2)$$

$$x'_4 \cdot x'_3 = \varphi(x_4 - i\beta x_1) \cdot x_3 = \varphi(x_4 \cdot x_3 - i\beta x_1 \cdot x_3)$$

$$\begin{aligned} x'_4 \cdot x'_4 &= \varphi(x_4 - i\beta x_1) \cdot \varphi(x_4 - i\beta x_1) = \varphi^2(x_4 \cdot x_4 - i\beta x_4 \cdot x_1 - i\beta x_1 \cdot x_4 - \beta^2 x_1 \cdot x_1) = \\ &= \varphi^2(0 - i\beta x_4 \cdot x_1 + i\beta x_4 \cdot x_1 - 0) = 0 \end{aligned}$$

y el tensor campo electromagnético transformado Lorentz será:

$$(F'_{jk}) = \begin{pmatrix} F'_{11} & F'_{12} & F'_{13} & F'_{14} \\ F'_{21} & F'_{22} & F'_{23} & F'_{24} \\ F'_{31} & F'_{32} & F'_{33} & F'_{34} \\ F'_{41} & F'_{42} & F'_{43} & F'_{44} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \varphi(F_{12} + i\beta F_{42}) & \varphi(F_{13} + i\beta F_{43}) & F_{14} \\ \varphi(F_{21} + i\beta F_{24}) & 0 & F_{23} & \varphi(F_{24} - i\beta F_{21}) \\ \varphi(F_{31} + i\beta F_{34}) & F_{32} & 0 & \varphi(F_{34} - i\beta F_{31}) \\ F_{41} & \varphi(F_{42} - i\beta F_{12}) & \varphi(F_{43} - i\beta F_{13}) & 0 \end{pmatrix}$$

3.4. Transformación de Lorentz del campo eléctrico:

$$\begin{aligned} \vec{E}' &= (E_1, E_2, E_3) = i(F'_{14}, F'_{24}, F'_{34}) = i(F_{14}, \varphi(F_{24} - i\beta F_{21}), \varphi(F_{34} - i\beta F_{31})) = \\ &= i(-iE_1, \varphi(-iE_2 - i\beta(-H_3)), \varphi(-iE_3 - i\beta H_2)) = (E_1, \varphi(E_2 - \beta H_3), \varphi(E_3 + \beta H_2)) \end{aligned}$$

$$\vec{E}' = \left(E_1, \frac{E_2 - \frac{v}{c} H_3}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}, \frac{E_3 + \frac{v}{c} H_2}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} \right)$$

3.5. Transformación de Lorentz del campo magnético:

$$\begin{aligned} \vec{H}' &= (H'_1, H'_2, H'_3) = i(F'_{23}, F'_{31}, F'_{12}) = (F_{23}, \varphi(F_{31} + i\beta F_{34}), \varphi(F_{12} + i\beta F_{42})) = \\ &= (H_1, \varphi(H_2 + \beta E_3), \varphi(H_3 - \beta E_2)) \end{aligned}$$

$$\vec{H}' = \left(H_1, \frac{H_2 + \frac{v}{c} E_3}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}, \frac{H_3 - \frac{v}{c} E_2}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} \right)$$

Documentación:

LANDAU, L. D., LIFSHITZ, E. M., Curso de Física Teórica, vol II (Teoría Clásica de los campos), Ed. Reverté, 1966, Barcelona

CHINEA, C. S., Sobre la transformación de Lorentz, 2008, <http://personales.ya.com/casanchi/fis/lorentz01.pdf>