DEDUCCION DE LA DINAMICA RELATIVISTA
CON ECUACIONES FUNCIONALES

por RODOLFO CARABIO

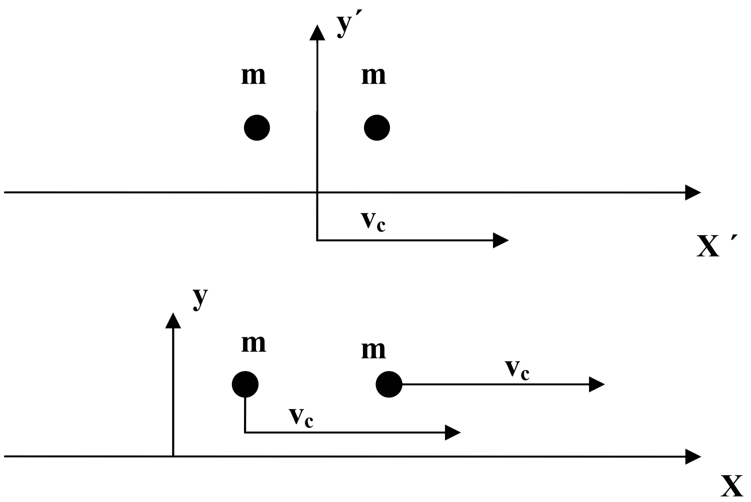
■ DEDUCCION DE LA DINAMICA RELATIVISTA

Para hallar las formulas que establecen la dinámica relativista es necesario plantear esquemas que conducen a ecuaciones funcionales, las cuales son imprescindibles en la comprensión de los resultados.

La cinemática relativista permite plantear la deducción de la dinámica relativista a partir de dos esquemas: el esquema de conservación del impulso y el esquema de conservación del impulso-energía, de la comparación de los resultados y contradicciones obtenidos mediante estos dos esquemas surge la dinámica relativista.

■ Esquema de conservación del impulso

Sean dos cuerpos de masas iguales m, en reposo de acuerdo al sistema de referencia (x'y').El cual se mueve con respecto al sistema de referencia en reposo con la velocidad $\mathbf{v}_C$ (velocidad del centro de inercia**)**

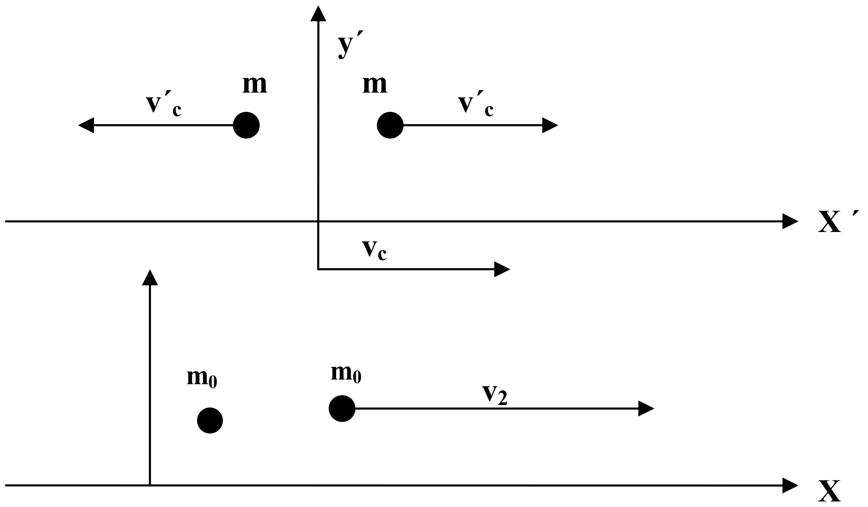


Si el impulso es una función de la velocidad, y admitiendo la proporcionalidad lineal del mismo con respecto a la cantidad de cuerpos de igual masa .El impulso total del sistema puede escribirse como el producto del número de cuerpos (dos en este caso) por una función dependiente de la velocidad (la del centro de inercia de acuerdo al esquema)

$$p = 2m.F(v_C)$$

Siendo F(v_C) una función a determinar.

Sea que entre los cuerpos actúe una fuerza que les comunique velocidades opuestas v_C'



De acuerdo al sistema de referencia en reposo (xy), se verán dos cuerpos con velocidades v_1 y v_2 .De acuerdo a la cinemática relativista:

$$v_1 = \frac{v'_C - v'_C}{1 - v'_C{}^2/c^2}$$

$$v_1 = 0$$

$$v_2 = \frac{2v_C}{1 + v_C{}^2/c^2}$$

El impulso total antes y después de que haya actuado la fuerza ha de ser el mismo, porque un sistema aislado de cuerpos no puede modificar su impulso total por si solo.

El impulso que al principio se hallaba por igual en ambos cuerpos con velocidad v_C, luego quedo en uno solo con velocidad v_2.

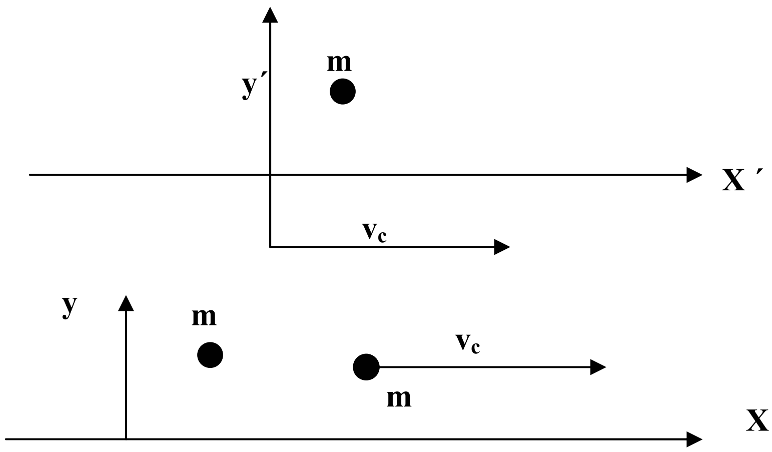
Con lo cual debiera cumplirse según este razonamiento:

$$2m.F(v_C) = m.F\left(\frac{2v_C}{1 + \frac{v_C{}^2}{c^2}}\right)$$

En forma genérica:

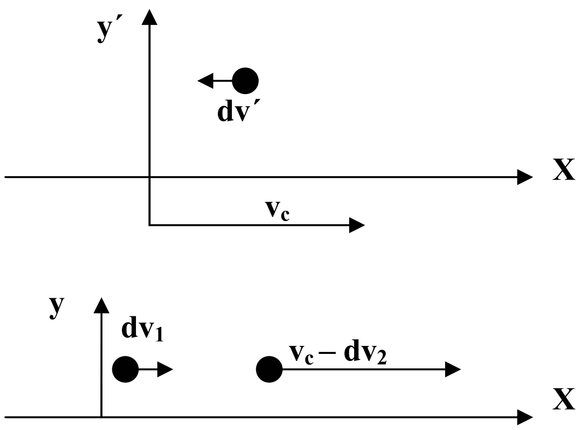
$$F(v) = \frac{1}{2}.F\left(\frac{2v}{1+\frac{v^2}{c^2}}\right)$$

Esta es una ecuación funcional que puede resolverse haciendo uso de los esquemas anteriores



Dos cuerpos de masas iguales m, cada uno de ellos en reposo según sus respectivos sistemas de referencia (xy) e (x′y′).

Si entre estos cuerpos actúa una fuerza que les comunica velocidades infinitesimales dv' y dv_1 .De acuerdo al principio de relatividad: $dv' = dv_1$



Según el sistema de referencia en reposo (xy), el cuerpo con velocidad inicial v_C , varía la misma en la magnitud dv_2

De acuerdo al teorema de suma de velocidad:

$$dv_2 = v_C - \frac{v_C - dv'}{1 - v_C.dv'/c^2}$$

$$dv_2 = \frac{v_C - v_C{}^2.dv'/c^2 - v_C + dv'}{1 - v_C.dv'/c^2}$$

$$dv_2 = \frac{dv' - v_C{}^2.dv'/c^2}{1 - v_C.dv'/c^2}$$

Como $dv' \to 0$, puede escribirse:

$$dv_2 = (1 - v_C{}^2/c^2).dv'$$

Teniendo en cuenta que $dv' = dv_1$

$$dv_2 = (1 - v_C{}^2/c^2).dv_1$$

Esta relación sirve como medida de la cantidad de movimiento o de impulso. Pudiéndose definir el mismo en forma diferencial.

$dp = m.dv_1$ (Cuando v→0)

O bien:

$$dp = \frac{m.dv_2}{1 - v^2/c^2}$$

Esta segunda expresión seria valida para todo valor de la velocidad, de 0 a c

Para hallar la formula del impulso según este esquema, se integra la expresión obtenida

$$p = m.\int_0^v \frac{dv}{1 - v^2/c^2}$$

Una simple integración por sustitución conduce al resultado:

$$p = \frac{mc}{2}\ln\frac{1 + v/c}{1 - v/c}$$

Para comprobar la validez de la expresión obtenida, hay que demostrar que es solución de la ecuación funcional planteada al comienzo:

$$F(v) = \frac{1}{2}.F\left(\frac{2v}{1 + v^2/c^2}\right)$$

De acuerdo al esquema:

$$p = m.F(v)$$

$$F(v) = \frac{c}{2}.\ln\frac{1 + v/c}{1 - v/c}$$

$$\frac{c}{2}.\ln\frac{1+v/c}{1-v/c}=\frac{1}{2}.\frac{c}{2}.\ln\frac{1+\dfrac{2v/c}{1+v^2/c^2}}{1-\dfrac{2v/c}{1+v^2/c^2}}$$

$$\ln\frac{1+v/c}{1-v/c}=\frac{1}{2}.\ln\frac{\dfrac{1+v^2/c^2+2v/c}{1+v^2/c^2}}{\dfrac{1+v^2/c^2-2v/c}{1+v^2/c^2}}$$

$$\ln\frac{1+v/c}{1-v/c}=\frac{1}{2}.\ln\frac{1+2v/c+v^2/c^2}{1-2v/c+v^2/c^2}$$

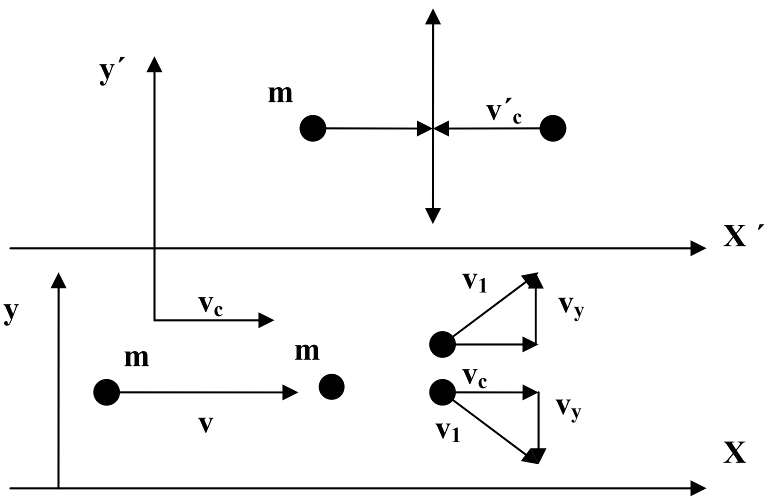
$$\ln\frac{1+v/c}{1-v/c}=\frac{1}{2}.\ln\frac{(1+v/c)^2}{(1-v^2/c^2)^2}$$

$$\ln\frac{1+v/c}{1-v/c}=\frac{1}{2}.2.\ln\frac{1+v/c}{1-v/c}$$

De esta manera se comprueba la solución de una ecuación funcional, y la coherencia del esquema planteado

El esquema de conservación del impulso y sus resultados, deben ser comparados con un esquema análogo, basado en la conservación del impulso-energía. Ambos esquemas determinan a su modo la Dinámica Relativista. Pero este ultimo de modo mas completo.

■ Esquema de conservación del impulso-energía



Se representa el choque de dos cuerpos de masas iguales m. Con velocidades opuestas v_C', según el sistema de referencia (x’y’**).**Los cuales luego del choque se desvían en ángulo recto en forma opuesta y a la misma velocidad v_C**'.** Conservando de esta manera el impulso y la energía.

Desde el punto de vista del sistema (xy).Es el choque de un cuerpo de masa (m) y velocidad $v = 2v_C / (1 + v_C{}^2 / c^2)$ con otro cuerpo de masa igual (m) en reposo .Luego del cual ambos toman velocidades iguales v_1 .La cual puede hallarse por composición de acuerdo a la cinemática relativista.

$$v_1 = \sqrt{v_C{}^2 + v_Y{}^2}$$
$$v_Y = v_C' . \sqrt{1 - v_C{}^2 / c^2}$$
$$v_1 = \sqrt{v_C{}^2 + v_C{}^2 (1 - v_C{}^2 / c^2)}$$
$$v_1 = v_C . \sqrt{2 - \frac{v_C{}^2}{c^2}}$$

Según el sistema de referencia (x'y').La energía que al principio se hallaba en el cuerpo con velocidad v, luego del choque se repartió por igual en los dos cuerpos con velocidad v_1 .Entonces si la energía cinética es una función determinada de la velocidad debe cumplirse lo siguiente:

$$E = m.F(v)$$
$$E = 2m.F(v_1)$$

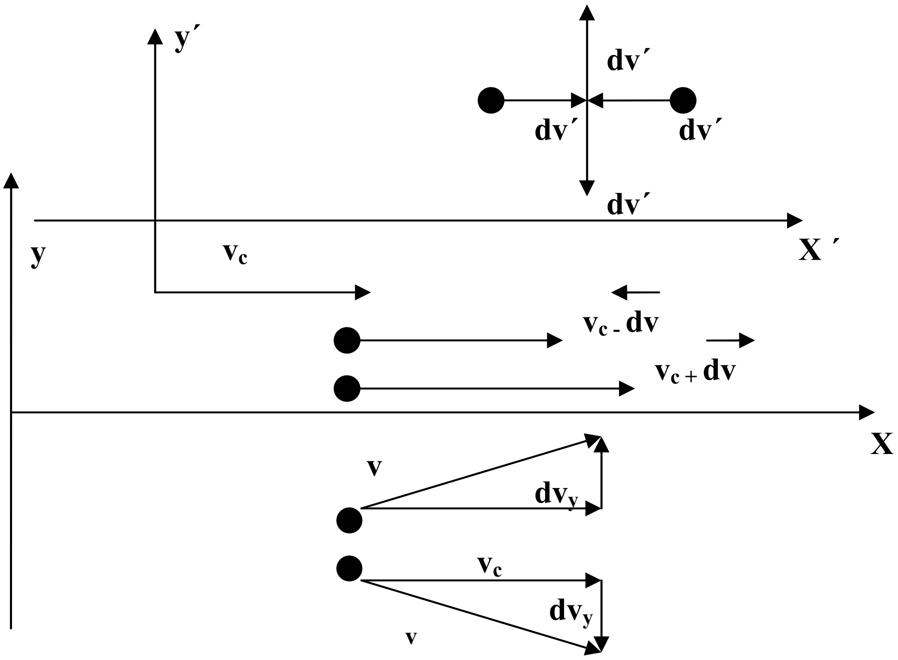
$$F\left(\frac{2v_C}{1 + v_C{}^2 / c^2}\right) = 2.F\left(v_C . \sqrt{2 - \frac{v_C{}^2}{c^2}}\right)$$

En forma genérica

$$F\left(\frac{2v}{1 + v^2 / c^2}\right) = 2.F\left(v . \sqrt{2 - \frac{v^2}{c^2}}\right)$$

Para hallar la solución a la ecuación funcional planteada, vamos a utilizar un esquema similar al anterior, pero cambiando las velocidades v_C' por los valores infinitesimales dv.

Antes del choque los dos cuerpos tienen con respecto al centro de inercia las velocidades $\overrightarrow{dv}$ y $\overleftarrow{dv}$, medidas según el sistema de referencia (xy)



$$\overrightarrow{dv} = \frac{v_C + dv'}{1 + \frac{v_C.dv'}{c^2}} - v_C$$

■ (**1**) $$\overrightarrow{dv} = \frac{(1 - v_C{}^2 / c^2)}{1 + \frac{v_C.dv'}{c^2}}.dv'$$

$$\overleftarrow{dv} = \frac{v_C - dv'}{1 - \frac{v_C.dv'}{c^2}} - v_C$$

■ $$\overleftarrow{dv} = \frac{1 - v_C{}^2 / c^2}{1 - \frac{v_C.dv'}{c^2}}.dv'$$

Luego del choque, ambos cuerpos toman velocidades iguales v, de acuerdo al sistema de referencia en reposo (xy).

Si la energía cinética es una función de la velocidad E = m.F(v) .Los dos cuerpos al pasar de una velocidad v_C ,a una velocidad v ,incrementan su energía en la magnitud:

$$dE = 2m.F'(v)$$
$$dv = v - v_C$$

De acuerdo al esquema:

$$dv = \sqrt{v_C{}^2 + dv_Y{}^2} - v_C$$

$$dv_Y = dv'.\sqrt{1 - v_C{}^2/c^2}$$

$$dv = \sqrt{v_C{}^2 + \left(1 - \frac{v_C{}^2}{c^2}\right).dv'^2} - v_C$$

$$dv = v_C.\sqrt{1 + \left(1 - \frac{v_C{}^2}{c^2}\right).\frac{dv'^2}{v_C{}^2}} - v_C$$

Haciendo el desarrollo en serie podemos escribir, despreciando términos de orden superior:

$$dv = v_C.\left[1 + \frac{(1 - v_C{}^2/c^2)}{2}.\frac{dv'^2}{c^2}\right] - v_C$$

$$d^2v = \frac{(1 - v_C{}^2/c^2)}{2v_C}.dv'^2$$

La diferencia en el modulo $(v - v_C)$ es un diferencial de segundo orden, lo cual no quita validez a la expresión $d^2E = 2m.F'(v).d^2v$

Comparando d²v con $\overrightarrow{dv}$ ò $\overleftarrow{dv}$, podemos escribir salvo términos de orden superior:

$$d^2v = \frac{\overrightarrow{dv}^{\,2}}{2v_C(1 - v_C{}^2/c^2)}$$

Según el esquema de choque, el incremento de la energía que experimentan los dos cuerpos al pasar ambos de v_C a $(v_C + d^2v)$, es igual a la suma de energías que experimentan al pasar uno de ellos de:

v_C a $(v_C + \overrightarrow{dv})$,y el otro de v_C a $(v_C - \overleftarrow{dv})$

$$d^2E = 2m.F'(v).d^2v$$

$$d^2E = 2m.F'(v).\frac{\overrightarrow{dv}^{\,2}}{2v_C.(1 - v_C{}^2/c^2)}$$

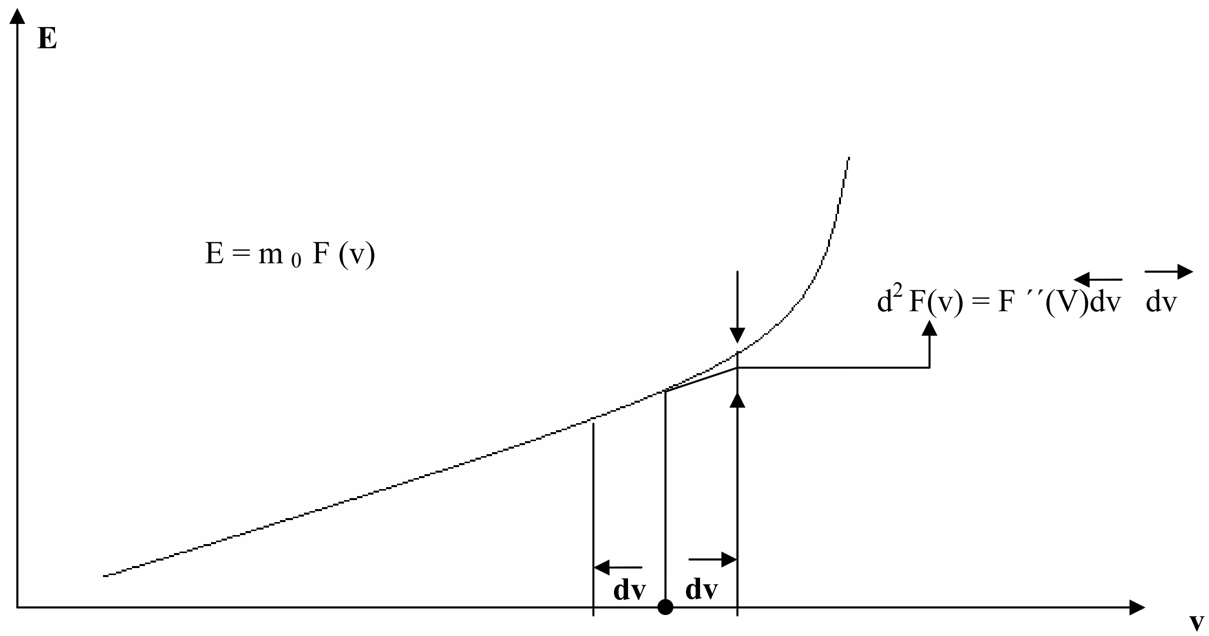
$$d^2E = m.F'(v).\frac{\overrightarrow{dv}^{\,2}}{v.(1 - v^2/c^2)}$$ (Notación genérica)

Para hallar la suma de energías al pasar uno de los cuerpos de las velocidades:

v_C a $(v_C + \overrightarrow{dv})$

y el otro cuerpo de: v_C a $(v_C - \overleftarrow{dv})$

De acuerdo al grafico que sigue se puede escribir:



$$d^2E = m.F'(v).\,\overrightarrow{dv} - m.F'(v).\,\overleftarrow{dv} + m.F''(v).\,\overrightarrow{dv}\,.\,\overleftarrow{dv}$$

$$d^2E = m.F'(v).\,\overrightarrow{dv}\left(1 - \frac{\overleftarrow{dv}}{\overrightarrow{dv}}\right) + m.F''(v).\,\overrightarrow{dv}\,.\,\overleftarrow{dv}$$

$$\frac{\overleftarrow{dv}}{\overrightarrow{dv}} = \frac{1 + v_C.dv'/c^2}{1 - v_C'.dv'/c^2}$$

Podemos escribir, salvo términos de orden superior:

$$\frac{\overleftarrow{dv}}{\overrightarrow{dv}} = 1 + \frac{2v_C.dv'}{c^2}$$

Sustituyendo dv’ según la igualdad (1) $dv' = \dfrac{\overrightarrow{dv}}{1 - v^2/c^2}$

$$\frac{\overleftarrow{dv}}{\overrightarrow{dv}} = 1 + \frac{2v_C.\,\overrightarrow{dv}}{c^2(1 - v_C{}^2/c^2)}$$

La expresión para d²E puede escribirse en forma genérica:

$$d^2E = m.F''(v).dv^2 - m.\frac{2v}{c^2}.\frac{dv^2}{(1 - v_C{}^2/c^2)}.F'(v)$$

Igualando las dos ecuaciones obtenidas para d²E

$$m.F''(v).dv^2 - m.\frac{2v}{c^2(1-v^2/c^2)}.F'(v).dv^2 = m.F'(v)\frac{dv^2}{v(1-v^2/c^2)}$$

$$F''(v) = F'(v).\frac{1}{v(1-v^2/c^2)} + \frac{2v}{c^2(1-v^2/c^2)}.F'(v)$$

$$\frac{F''(v)}{F'(v)} = \frac{dv}{v(1-v^2/c^2)} + \frac{2v.dv}{c^2(1-v^2/c^2)}$$

$$\frac{dF'(v)}{F'(v)} = \frac{dv}{v(1-v^2/c^2)} + \frac{2v.dv}{c^2(1-v^2/c^2)}$$

Integrando ambos miembros de esta ecuación

$$\int \frac{dF'(v)}{F'(v)} = \int \frac{dv}{v(1-v^2/c^2)} + \int \frac{2v.dv}{c^2(1-v^2/c^2)}$$

$$\ln F'(v) = \ln \frac{v}{c\sqrt{1/v^2/c^2}} - \ln\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right) + B$$

Siendo B la constante de integración

$$F'(v) = \frac{B.v}{c\sqrt{1-v^2/c^2}.(1-v^2/c^2)}$$

Teniendo en cuenta que E= m.F(v)

$$dE = m.F'(v).dv$$

$$dE = \frac{m.B.v}{c.(1-v^2/c^2)^{3/2}}dv$$

$$dE = F.dx$$

$$F = \frac{m.B.v}{c(1-v^2/c^2)^{3/2}}\frac{dv}{dx}$$

$$F = \frac{m.B}{c(1-v^2/c^2)^{3/2}}.\frac{dv}{(dx/dv)}$$

$$F = \frac{B.m}{c(1-v^2/c^2)^{3/2}}.\frac{dv}{dx}$$

Podemos determinar el valor de B .Teniendo en cuenta que para cuando v<<c, la formula obtenida se acerca al valor clásico F= m.a

B=c

$$F = \frac{m}{(1-v^2/c^2)^{3/2}}.\frac{dv}{dt}$$

Para hallar el impulso, tenemos en cuenta que dp= F.dt

$$dp = m.\frac{dv}{(1-v^2/c^2)^{3/2}}$$

$$p = m.\int \frac{dv}{(1-v^2/c^2)^{3/2}}$$

$$p = \frac{m.v}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$$

Se deduce de esta manera la formula para el impulso, la cual se da como un principio en la literatura

Para hallar la formula para la energía cinética se integra m.F'(v)

$$F'(v) = \frac{v}{(1-v^2/c^2)^{3/2}}$$

$$E = m.\int \frac{v.dv}{(1-v^2/c^2)^{3/2}}$$

$$E = \frac{m.c^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}}\Bigg|_0^v$$

$$E_C = m.c^2\left(\frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}} - 1\right)$$

Para demostrar la validez de la deducción. Vamos a comprobar si la función obtenida F(v) es solución de la ecuación funcional planteada según el esquema de conservación del impulso-energía.

De acuerdo a que la energía es una función de la velocidad

$$E = m.F(v)$$

$$F(v) = c^2.\left(\frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}} - 1\right)$$

$$c^2\left(\frac{1}{\sqrt{1-\frac{4v^2}{(1-v^2/c^2)^2.c^2}}} - 1\right) = 2.c^2\left(\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}\left(2-\frac{v^2}{c^2}\right)}} - 1\right)$$

$$\frac{1}{\sqrt{\frac{c^2(1+v^2/c^2)^2-4v^2}{(1+v^2/c^2)^2.c^2}}}-1=\frac{2}{\sqrt{1-\frac{2v^2}{c^2}+\frac{v^4}{c^4}}}-2$$

$$\frac{1+v^2/c^2}{\sqrt{\left(1+\frac{v^2}{c^2}\right)^2-\frac{4v^2}{c^2}}}+1=\frac{2}{1-v^2/c^2}$$

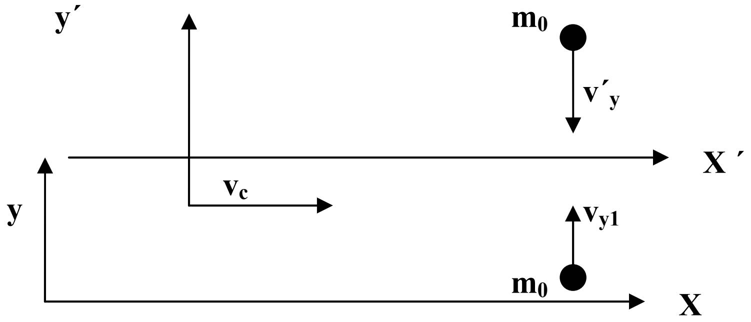
$$\frac{1+v^2/c^2}{1-v^2/c^2}+1=\frac{2}{1-v^2/c^2}$$

$$\frac{1+v^2/c^2+(1-v^2/c^2)}{1-v^2/c^2}=\frac{2}{1-v^2/c^2}$$

$$\frac{2}{1-v^2/c^2}=\frac{2}{1-v^2/c^2}$$

De esta manera el esquema de conservación del impulso–energia demuestra la expresión para la energía cinética en relatividad

Para determinar el valor de las proyecciones del impulso según este esquema, se parte de la definición básica del impulso



$$p_{Y1}=\frac{m.v_{Y1}}{\sqrt{1-v_{Y1}{}^2/c^2}}$$

$$v'_Y=v_{Y1}$$

$$v_{Y2}=v'_Y\sqrt{1-v_C{}^2/c^2}$$

De acuerdo al principio de relatividad si ambos cuerpos chocan de modo perfectamente elástico, cambian sus velocidades por las opuestas.

$$v_{Y1}\to -v_{Y1}$$

$$v_Y'\to -v_Y$$

Lo cual significa que:

$$p_{Y2}=p_{Y1}$$

$$p_{Y2} = \frac{m.v_{Y1}}{\sqrt{1 - v_{Y1}{}^2 / c^2}}$$

$$v_{Y2} = v_{Y1} . \sqrt{1 - v_C{}^2 / c^2}$$

$$p_{Y2} = \frac{m.v_{Y2}}{\sqrt{1 - v_C{}^2 / c^2} . \sqrt{1 - v_{Y1}{}^2 / c^2}}$$

$$(2) p_{Y2} = \frac{m.v_{Y2}}{\sqrt{1 - \frac{v_{Y1}{}^2}{c^2} - \frac{v_C{}^2}{c^2} + \frac{v_C{}^2 . v_Y{}^2}{c^4}}}$$

Teniendo en cuenta que.

$$v = \sqrt{v_C{}^2 + v_{Y2}{}^2}$$

$$v = \sqrt{v_C{}^2 + \left(1 - \frac{v_C{}^2}{c^2}\right) v_{Y1}{}^2}$$

$$(3) v = \sqrt{v_C{}^2 + v_{Y1}{}^2 - \frac{v_C{}^2 . v_{Y1}{}^2}{c^2}}$$

Comparando la expresión (**2**)con la (**3**),podemos escribir:

$$p_{Y2} = \frac{m.v_{Y2}}{\sqrt{1 - v^2 / c^2}}$$

En forma general:

$$p_Y = \frac{m.v_Y}{\sqrt{1 - v / c^2}}$$

$$p_X = \frac{m.v_X}{\sqrt{1 - v^2 / c^2}}$$

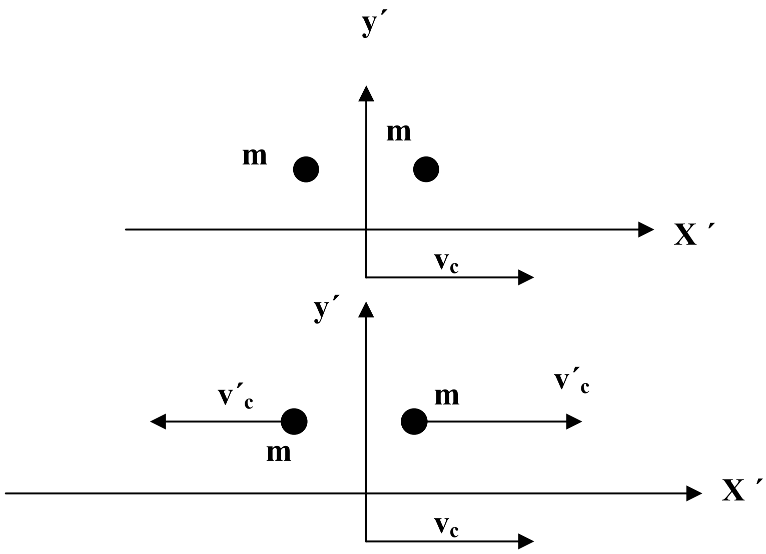
Las proyecciones py;px, del impulso p son equivalentes a la proyección del vector p sobre los ejes(x y)

El esquema de conservación del impulso y el esquema de conservación del impulso-energía aun basándose en esquemas similares, se contradicen en sus resultados.

No obstante se ha mostrado la coherencia interna de ambos métodos

Vamos a comparar las formulas para el impulso de ambos esquemas en el marco del esquema de conservación del impulso, pero usando los resultados del sistema de conservación del impulso-energía

A)



B)

$$p = \frac{m.c}{2}.\ln\frac{1+v/c}{1-v/c}$$

$$p = \frac{m.v}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$$

De acuerdo al esquema de conservación del impulso-energía, el impulso del sistema de cuerpos (A) es con respecto al sistema de referencia (xy) en reposo:

$$p_A = \frac{2m.v_C}{\sqrt{1-v_C{}^2/c^2}}$$

El impulso p_B del sistema de cuerpos (B) es con respecto al sistema de referencia en reposo (xy):

$$p_B = \frac{mv_1}{\sqrt{1-v_1{}^2/c^2}} \quad \textbf{(7)}$$

De acuerdo al esquema: $v_1 = \dfrac{2v_C}{1+v_C{}^2/c^2}$

Insertando el valor de v_1 en la expresión del valor de p_B **(7)** y operando se obtiene:

$$p_B = \frac{2m.v_C}{(1 - v_C{}^2 / c^2)}$$

De donde se comprueba que $p_B \succ p_A$ según el esquema de conservación del impulso-energía

De acuerdo al esquema de conservación del impulso por definición los sistemas de cuerpos(A) y (B) tienen el mismo valor con respecto al sistema de referencia en reposo (xy)

Un análisis cuidadoso nos indica que estos sistemas no son iguales.

En el sistema de referencia (B) se requiere una determinada energía potencial para comunicar a los dos cuerpos velocidades opuestas $v_C{}'$,la cual no existe en el sistema de cuerpos (A)

Para solucionar la contradicción existente entre los dos esquemas ,se puede suponer que la energía potencia disponible para comunicar a los dos cuerpos velocidades $v_C{}'$,tiene una masa asociada a la misma .La cual a su vez tiene un impulso que se suma al impulso que tienen los dos cuerpos de masa (m).De manera que el impulso total del sistema de dos cuerpos de masa m y energía potencial E**'** ,es igual al impulso que tiene un solo cuerpo de masa m y velocidad v= $2v_C/(1+v_C{}^2/c^2)$ (**4)**.Ya que una vez que la fuerza haya actuado, la energía potencial y su masa asociada desaparecen.

Llamando m = B.E_0**',** a la masa inercial asociada a la energía E_0**'**, y B a una constante a determinar. Según el esquema del impulso-energía debe cumplirse:

$$p = \frac{B.E_0{}'.v_C}{\sqrt{1 - v_C{}^2 / c^2}} + \frac{2m.v_C}{\sqrt{1 - v_C{}^2 / c^2}} \qquad \textbf{(5)}$$

$$p = \frac{m.v}{\sqrt{1 - v^2 / c^2}} \qquad \textbf{(6)}$$

Introduciendo en (**6**) la expresión (**4**) para la velocidad, e igualando, con (**5**), tenemos luego de hacer las operaciones:

$$\frac{B.E_0'.v_C + 2m.v_C}{\sqrt{1 - v_C{}^2 / c^2}} = \frac{2m.v_C}{1 - v_C{}^2 / c^2}$$

$$B.E_0' = 2m\left(\frac{1}{\sqrt{1 - v_C{}^2 / c^2}} - 1\right)$$

Teniendo en cuenta que la energía cinética de los cuerpos es:

$$Ec = 2mc^2\left(\frac{1}{\sqrt{1 - v_C{}^2 / c^2}} - 1\right)$$

$$B.E_0' = E_C / c^2$$

De acuerdo al esquema de conservación del impulso, la energía potencial E' comunica a los dos cuerpos velocidades v_C' con respecto al sistema de referencia (x'y'), entonces la energía cinética de estos dos cuerpos con respecto al sistema de referencia (xy) al ser su velocidad con respecto a ese sistema $v_C = v_C'$, debe ser igual a E'

$$E'c = Ec$$

Esto nos da la posibilidad de hallar B

$$B = 1/c^2$$

De donde se establece finalmente la relación masa-energía

$$E_0 = m.c^2$$

La relación masa-energía surge como una necesidad a fin de poner en acuérdalos resultados que se obtienen a partir de los esquemas de conservación del impulso y del esquema de conservación del impulso-energía

■ Energía total

La relación masa-energía hace tomar significado al concepto de energía total de una masa (m) con velocidad v, si definimos la energía total como la suma energía cinética con la energía de masa.

$$Et = E_0 + Ec$$

$$Et = \frac{m.c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

Relacionando el impulso y la energía total se obtiene:

$$p = \frac{mv}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

$$p^2 - p^2.\frac{v^2}{c^2} = m^2v^2$$

$$p^2 = p^2.\frac{v^2}{c^2} + m^2v^2$$

$$p^2c^2 = p^2v^2 + m^2v^2c^2$$

$$p^2c^2 = (p^2 + m^2c^2)v^2$$

$$v^2/c^2 = p^2/(p^2 + m^2c^2)$$

Introduciendo el valor de v^2/c^2 en la raíz de la expresión de la energía total Et

$$Et = \sqrt{p^2c^2 + m^2c^4}$$

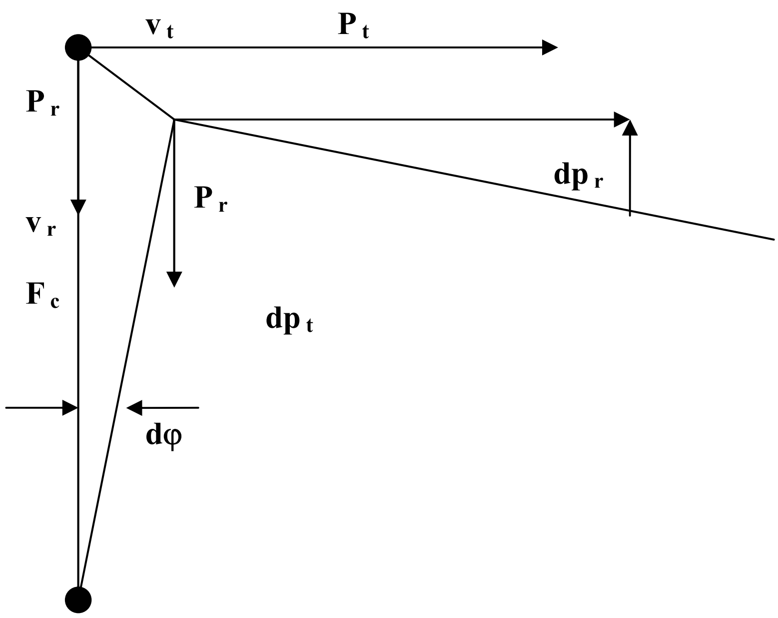
De esta expresión se desprende que puede existir energía sin masa asociada a la misma

En efecto, si en la formula consideramos que la masa m =0

$$Et = pc$$

▪ Momento de impulso en Dinámica Relativista

Al estudiar el movimiento de un cuerpo en un campo central de fuerzas en física clásica se encuentra que el producto de la masa de un cuerpo por su velocidad tangencial y la distancia al centro es una magnitud constante: m.v.r cte .Tal magnitud es una característica del sistema considerado y se denomina momento de impulso de la partícula .Vamos a ver si en relatividad tal sistema tiene características análogas y en que forma.



$$r.d\varphi = v_T.dr$$

$$dp_T = -p_r.\frac{v_T}{r}.dt$$

$$dp_T = -p_r.\frac{v_T}{r}.\frac{dr}{v_r}$$

$$dp_T = \frac{-m.v_r}{\sqrt{1-v^2/c^2}}.\frac{v_T}{r}.\frac{dr}{v_r}$$

$$dp_T = -p_T.\frac{dr}{r}$$

$$\frac{dp_T}{p_T} = -\frac{dr}{r}$$

La integración de ambos miembros y estableciendo límites:

$$\ln p_T \Big|_{pT1}^{pT2} = -\ln r\Big|_{r1}^{r2}$$

$$\frac{p_{T2}}{p_{T1}} = \frac{r_1}{r_2}$$

Se demuestra que el producto $p_{T.}r = cte$, en Dinámica Relativista

Con lo cual podemos redefinir el concepto de momento de impulso en dicha dinámica tal como sigue:

$$L = p_T.r$$

$$L = \frac{m.v_T.r}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$$

A partir del esquema puede obtenerse la expresión para la fuerza centrifuga Fc

$$dp_r = p_T.d\varphi$$

$$\frac{dp_r}{dt} = p_T\,\frac{d\varphi}{dt}$$

Teniendo en cuenta que:

$$r.d\varphi = v_T.dt$$

$$\frac{dp_r}{dt} = p_T\,\frac{v_T.dt}{dt.r}$$

$$\frac{dp_r}{dt} = p_T.\frac{v_T}{r}$$

Se requiere una fuerza centrípeta para anular esta componente dpr en un intervalo de tiempo dt .Siendo :

$$p_T = m.v_T / \sqrt{1-v^2/c^2}$$

Queda finalmente:

$$Fc = \frac{m.v_T{}^2}{\sqrt{1 - v^2 / c^2}.r}$$

■ FUERZAS EN RELATIVIDAD

En mecánica clásica se estudian las fuerzas que ejercen objetos entre sí, la magnitud de dichas fuerzas depende de la masa de los cuerpos que interaccionan, de la distancia entre ellos, de sus velocidades relativas, etc. En cuanto a la dependencia de las fuerzas con las velocidades, el principio de relatividad establece que las formulas que describen han de ser las mismas independientemente del sistema de referencia elegido .Esto podría significar que dichas formulas tienen una forma determinada ,única y universal ,la cual podría hallarse por medio del formalismo matemático de la dinámica relativista y un esquema apropiado a tal fin, de manera similar a como se hizo para hallar las expresiones correspondientes para el impulso y la energía.

Para concretar, se estudiara a continuación la dependencia de las fuerzas transversales con la velocidad en relatividad

Sean dos cuerpos de masa m), con velocidades v_1 y v_2 con respecto al sistema de referencia en reposo (xy) .Con respecto al sistema de referencia en movimiento (x'y') los cuerpos tienen las velocidades ($v_1' ; v_2'$)

Si entre los cuerpos actúa una fuerza cuya dirección es normal a la dirección del movimiento, en el sistema (x'y') se medirá una fuerza $F'y$, siendo:

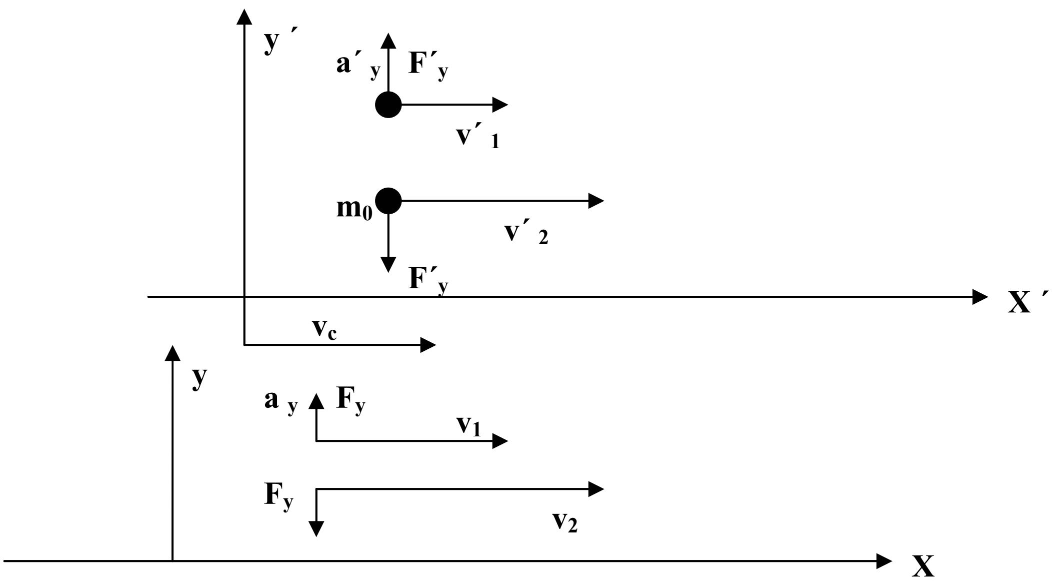
$$F'y = F\,(v_1' ; v_2')$$

En el sistema de referencia (xy) se medirá que la fuerza tiene el valor:

$$Fy = F(v_1 ; v_2)$$

El primer paso es hallar la relación entre ambas fuerzas

En el grafico que sigue se muestra la misma situación fisica vista por los sistemas de referencia en movimiento relativo



$$F'y = F(v_1';v_2')$$
$$Fy = F(v_1,v_2)$$

De acuerdo a lo establecido, el valor de F’y y Fy se pueden relacionar a partir de la relación entre a' con a y v'_1 con v_1

$$F'y = \frac{m.a'_Y}{\sqrt{1-v'^2_1/c^2}}$$

$$a'_Y = \frac{v'_Y}{\Delta t'} \therefore a_Y = \frac{v_Y}{\Delta t}$$

(7) $$v_1 = \frac{v_C + v'_1}{1+\frac{v_C v'_1}{c^2}} \therefore v_2 = \frac{v_C + v'_2}{1+\frac{v_C v'_2}{c^2}}$$

Para hallar la relación entre a' y a ,primero hay que calcular la relación entre v_Y ; v'_Y

$$v_Y = \frac{v'_Y.\sqrt{1-v_C{}^2/c^2}}{1+\frac{v_C v'_1}{c^2}}$$

Y los intervalos de tiempo $\Delta t;\Delta t'$

$$\Delta t = \frac{t_2' + v_C x_2' / c^2}{\sqrt{1 - v_C{}^2 / c^2}} - \frac{t_1' + v_C x_1 / c^2}{\sqrt{1 - v_C{}^2 / c^2}}$$

$$\Delta t = \frac{t_2' - t_1' + v_C (x_2' - x_1') / c^2}{\sqrt{1 - v_C{}^2 / c^2}}$$

$$x_2' - x_1' = v_1'.\Delta t'$$

$$\Delta t = \frac{\Delta t' + v_C.v_1'.\Delta t' / c^2}{\sqrt{1 - v_C{}^2 / c^2}}$$

$$\Delta t = \frac{1 + v_C.v_1' / c^2}{\sqrt{1 - v_C{}^2 / c^2}}.\Delta t'$$

$$a_Y = \frac{v_Y'.\sqrt{1 - v_C{}^2 / c^2}.\sqrt{1 - v_C{}^2 / c^2}}{\left(1 + \frac{v_C v_1'}{c^2}\right)\left(1 + \frac{v_C v_1'}{c^2}\right).\Delta t'}$$

(8) $$a_Y = \frac{1 - v_C{}^2 / c^2}{\left(1 + \frac{v_C v_1'}{c^2}\right)^2}.a_Y'$$

$$Fy = \frac{m.a_Y}{\sqrt{1 - v_1{}^2 / c^2}} \qquad \textbf{(9)}$$

Introduciendo en la expresión (9) ,la expresión (7),y luego la relación (8) entre las aceleraciones :

$$Fy = \frac{m.a_Y}{\sqrt{1 - \left(\frac{v_C + v_1'}{1 + v_C v_1' / c^2}\right)^2 \frac{1}{c^2}}}$$

$$Fy = \frac{m.a_Y (1 + v_C.v_1' / c^2)}{\sqrt{\left(1 + \frac{v_C.v_1'}{c^2}\right)^2 - \frac{(v_C + v'_1)^2}{c^2}}} = \frac{m.a_Y (1 + v_C.v_1' / c^2)}{\sqrt{1 + \frac{2v_C.v_1'}{c^2} + \frac{v_C{}^2.v_1'^2}{c^4} - \frac{v_C{}^2}{c^2} - \frac{2v_C.v_1'}{c^2} - \frac{v_1'^2}{c^2}}}$$

$$Fy = \frac{m.a_Y (1 + v_C.v_1' / c^2)}{\sqrt{1 - \frac{v_C{}^2}{c^2} - \frac{v_1'^2}{c^2} + \frac{v_C{}^2.v_1'^2}{c^4}}} = \frac{m.(1 - v_C{}^2 / c^2).a_Y'.(1 + v_C.v_1' / c^2)}{\left(1 + \frac{v_C.v_1'}{c^2}\right)^2.\sqrt{1 - v_C{}^2 / c^2}.\sqrt{1 - v_1'^2 / c^2}}$$

$$Fy = \frac{m.a_Y' \sqrt{1 - v_C{}^2 / c^2}}{\sqrt{1 - v'^2 / c^2{}_1}.\left(1 + \frac{v_C.v_1'}{c^2}\right)}$$

$$Fy=\frac{\sqrt{1-v_C{}^2/c^2}}{\left(1+\frac{v_C.v_1}{c^2}\right)}.F'y$$

Si la fuerza es función de las velocidades v_1 y v_2 ,podemos escribir:

$$F(v_1;v_2)=\frac{\sqrt{1-v_C{}^2/c^2}}{\left(1+\frac{v_C.v_1'}{c^2}\right)}.F(v_1';v'_2)$$

Dada la relación entre las velocidades **(** v_1 con v'_1, y v_2 con v'_2 **),** podemos plantear la ecuación ;

$$F\left[\left(\frac{v_C+v_1'}{1+\frac{v_C.v_1'}{c^2}}\right);\left(\frac{v_C+v_2'}{1+\frac{v_C.v_1'}{c^2}}\right)\right]=\frac{\sqrt{1-v_C{}^2/c^2}}{1+\frac{v_C.v_1'}{c^2}}.F(v_1';v_2')$$

Esta es una ecuación funcional de dos variables $F(v_1 ; v_2)$ .Resolverla permite hallar la dependencia de la fuerza transversal con la velocidad en relatividad

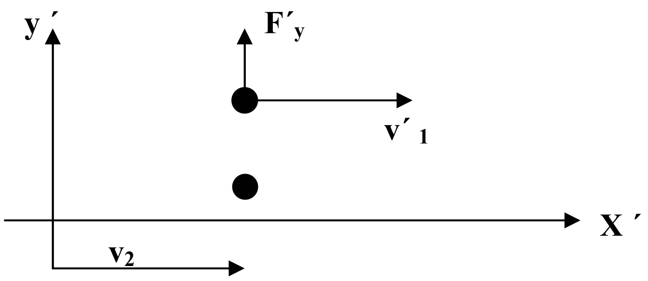
Para resolver la ecuación planteada, se considera a uno de los cuerpos en reposo con respecto al sistema de referencia (x'y').Con lo cual:

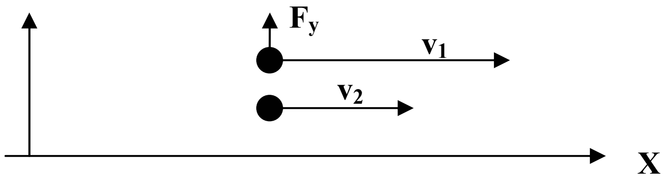
$$v_2'=0$$

$$v_2=v_C$$

Y la ecuación se escribe como sigue:

$$Fy=\frac{\sqrt{1-v_2{}^2/c^2}}{1+\frac{v_2.v_1'}{c^2}}$$





Siendo v_1'

$$v_1' = \frac{v_1 - v_2}{1 - \frac{v_1.v_2}{c^2}}$$

$$1 + \frac{v_1'.v_2}{c^2} = 1 + \frac{v_1 - v_2}{\left(1 - \frac{v_1.v_2}{c^2}\right)}.\frac{v_2}{c^2}$$

$$1 + \frac{v_1'.v_2}{c^2} = \frac{1 - v_1.v_2 / c^2 - v_2{}^2 / c^2}{1 - \frac{v_1.v_2}{c^2}}$$

$$1 + \frac{v_1'.v_2}{c^2} = \frac{1 - v_2{}^2 / c^2}{1 - v_1.v_2 / c^2}$$

Reemplazando $1 + \frac{v_2.v_1'}{c^2}$ por su equivalente, se obtiene :

$$Fy = \frac{\sqrt{1 - v_2{}^2 / c^2}}{1 - v_2{}^2 / c^2}.(1 - v_1.v_2 / c^2).F(v_1')$$

$$F(v_1;v_2) = \frac{(1 - v_1.v_2 / c^2)}{\sqrt{1 - v_2{}^2 / c^2}}.F(v_1')$$

$$F(v_1;v_2) = \frac{1 - v_1.v_2 / c^2}{\sqrt{1 - v_2{}^2 / c^2}}.F\left(\frac{v_1 - v_2}{1 - v_1.v_2 / c^2}\right)$$

Siendo F una función arbitraria del argumento. Para el caso mas simple en el cual $F(v_1') = cte$

$$F(v_{1;}v_2) = \frac{1 - v_1.v_2/c^2}{\sqrt{1 - v_2{}^2/c^2}}$$

Vamos a comprobar que la formula obtenida es solución de la ecuación funcional planteada.

Dado que la ecuación funcional debe ser valida para todo sistema de referencia la escribimos para el sistema de referencia(xy),con lo cual escribimos todo sin comillas.

$$F\left[\left(\frac{v_C + v_1}{1 + \frac{v_C.v_1}{c^2}}\right);\left(\frac{v_C + v_2}{1 + \frac{v_C.v_2}{c^2}}\right)\right] = \frac{\sqrt{1 - v_C{}^2/c^2}}{1 + \frac{v_C.v_1}{c^2}}.F(v_1;v_2)$$

$$\frac{1 - \left(\frac{v_C + v_1}{1 + v_C.v_1/c^2}\right)\left(\frac{v_C + v_2}{1 + v_C.v_2/c^2}\right).\frac{1}{c^2}}{\sqrt{1 - \left(\frac{v_C + v_2}{1 + v_C.v_2/c^2}\right)^2.\frac{1}{c^2}}} = \frac{\sqrt{1 - v_C{}^2/c^2}}{\left(1 + \frac{v_C.v_1}{c^2}\right)}.\frac{(1 - v_1.v_2/c^2)}{\sqrt{1 - v_2{}^2/c^2}}$$

$$\frac{(1 + v_C.v_1/c^2)(1 + v_C.v_2/c^2) - (v_C + v_1).(v_C + v_2)/c^2}{\left(1 + \frac{v_C.v_1}{c^2}\right).\sqrt{\left(1 + \frac{v_C.v_2}{c^2}\right)^2 - \frac{(v_C + v_2)^2}{c^2}}} = \frac{\sqrt{1 - v_C{}^2/c^2}}{\left(1 + \frac{v_C.v_1}{c^2}\right)}.\frac{1 - v_1.v_2/c^2}{\sqrt{1 - v_2{}^2/c^2}}$$

$$\frac{1 + v_C v_2/c^2 + v_C v_1/c^2 + v_C{}^2.v_1 v_2/c^4 - v_C{}^2/c^2 - v_C v_2/c^2 - v_C v_1/c^2 - v_1 v_2/c^2}{\sqrt{1 + 2v_C v_2/c^2 + v_C{}^2.v_2{}^2/c^4 - v_C{}^2/c^2 - 2v_C v_2/c^2 - v_2{}^2/c^2}} =$$

$$= \frac{1 - v_C{}^2/c^2 - v_1 v_2/c^2 + v_C{}^2.v_1 v_2/c^4}{\sqrt{1 - v_C{}^2/c^2 - v_2{}^2/c^2 + v_C{}^2 v_2{}^2/c^4}} = \sqrt{1 - \frac{v_C{}^2}{c^2}}.\frac{(1 - v_1 v_2/c^2)}{\sqrt{1 - v_2{}^2/c^2}}$$

$$\frac{(1 - v_C{}^2/c^2)(1 - v_1 v_2/c^2)}{\sqrt{1 - v_C{}^2/c^2}.\sqrt{1 - v_2{}^2/c^2}} = \sqrt{1 - v_C{}^2/c^2}.\frac{(1 - v_1 v_2/c^2)}{\sqrt{1 - v_2{}^2/c^2}}$$

$$\frac{1 - v_1 v_2/c^2}{\sqrt{1 - v_2{}^2/c^2}} = \frac{1 - v_1 v_2/c^2}{\sqrt{1 - v_2{}^2/c^2}}$$

De esta manera se comprueba la validez de la formula obtenida para la fuerza transversal según la velocidad en relatividad

Para el cálculo efectivo de esta fuerza se escribe:

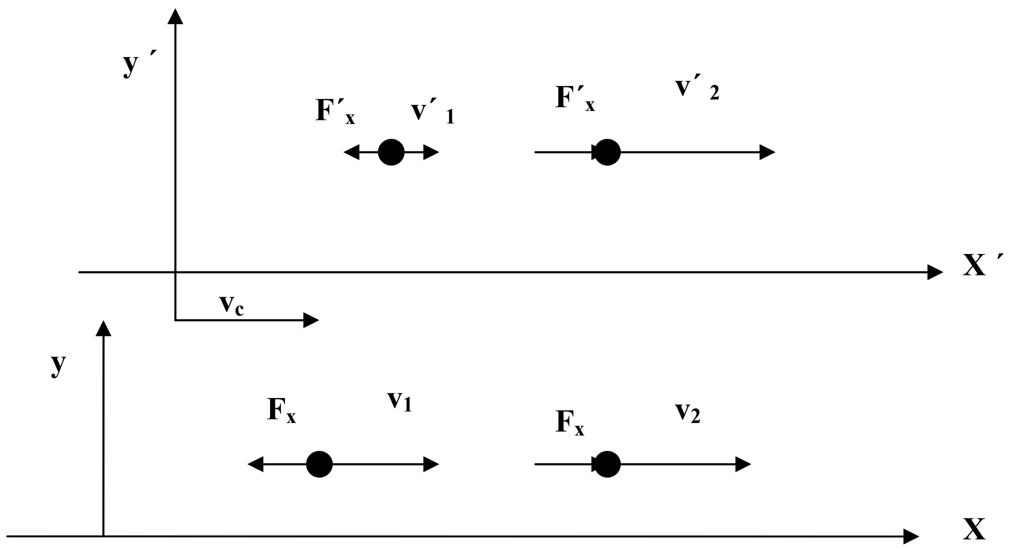
$$Fy_1 = \frac{1 - v_1 v_2 / c^2}{\sqrt{1 - v_2{}^2 / c^2}} . F_0$$

$$Fy_2 = \frac{1 - v_1 v_2 / c^2}{\sqrt{1 - v_1{}^2 / c^2}} . F_0$$

Siendo F_0 la fuerza que ejercen entre si los cuerpos al estar en reposo con respecto al sistema de referencia (xy)

■ FUERZAS LONGITUDINALES

Para estudiar el caso en el cual la dirección del vector fuerza coincide con la dirección del vector velocidad, pueden aplicarse los mismos principios y métodos utilizados para hallar las fuerzas transversales



Escribimos para comenzar las expresiones de Fx y $F'x$ para establecer la relacion entre ellas:

$$F'x = \frac{m}{(1 - v'_1{}^2 / c^2)^{3/2}} . \frac{dv'}{dt'}$$

$$Fx = \frac{m}{(1 - v_1{}^2 / c^2)^{3/2}} . \frac{dv}{dt}$$

$$F'x = F(v'_1 ; v'_2)$$

$$Fx = F(v_1 ; v_2)$$

$$v_1 = \frac{v_C + v_1'}{1 + \frac{v_C v_1'}{c^2}}$$

Para establecer la relación entre $\frac{dv}{dt}$ y $\frac{dv'}{dt'}$,hay que hallar las relaciones dv con dv' y dt con dt'

$$dv_1 = \frac{1 + v_C v_1'/c^2 - (v_C + v_1')/c^2}{(1 + v_C v_1'/c^2)^2}.dv_1'$$

$$dv_1 = \frac{1 - v_C{}^2/c^2}{(1 + v_C v_1'/c^2)^2}.dv_1'$$

$$dt = \frac{t_2' + v_C x_2'/c^2}{\sqrt{1 - v_C{}^2/c^2}} - \frac{t_1' + v_C x_1'/c^2}{\sqrt{1 - v_C{}^2/c^2}} = \frac{(t_2' - t'_1) + v_C(x_2' - x_1')/c^2}{\sqrt{1 - v_C{}^2/c^2}}$$

$$dt = \frac{dt' + v_C v'_1.dt'/c^2}{\sqrt{1 - v_C{}^2/c^2}}$$

$$dt = \frac{1 + v_C v_1/c^2}{\sqrt{1 - v_C{}^2/c^2}}.dt'$$

Sustituyendo las variables $dv; dt$ por sus equivalentes en la formula para Fx

$$Fx = \frac{m}{(1 - v_1{}^2/c^2)^{3/2}}.\frac{(1 - v_C{}^2/c^2)}{\left(1 + \frac{v_C v'_1}{c^2}\right)^2} dv'.\frac{\sqrt{1 - v_C{}^2/c^2}}{\left(1 + \frac{v_C v_1'}{c^2}\right).dt} \quad \textbf{(10)}$$

Teniendo en cuenta que: $v_1 = \frac{v_C + v_1'}{1 + \frac{v_C v_1'}{c^2}}$

Sustituyendo v_1 por su equivalente en(10),y agrupando terminos se obtiene

$$Fx = \frac{m(1 - v_C{}^2/c^2)^{3/2}}{\left[1 - \frac{(v_C + v_1')^2}{(1 + v_C v_1'/c^2)^2.c^2}\right]\left(1 + \frac{v_C v_1'}{c^2}\right)^3}.\frac{dv'}{dt'}$$

$$Fx = \frac{m}{\sqrt{1 - v_1'^2/c^2}}.\frac{dv'}{dt'}$$

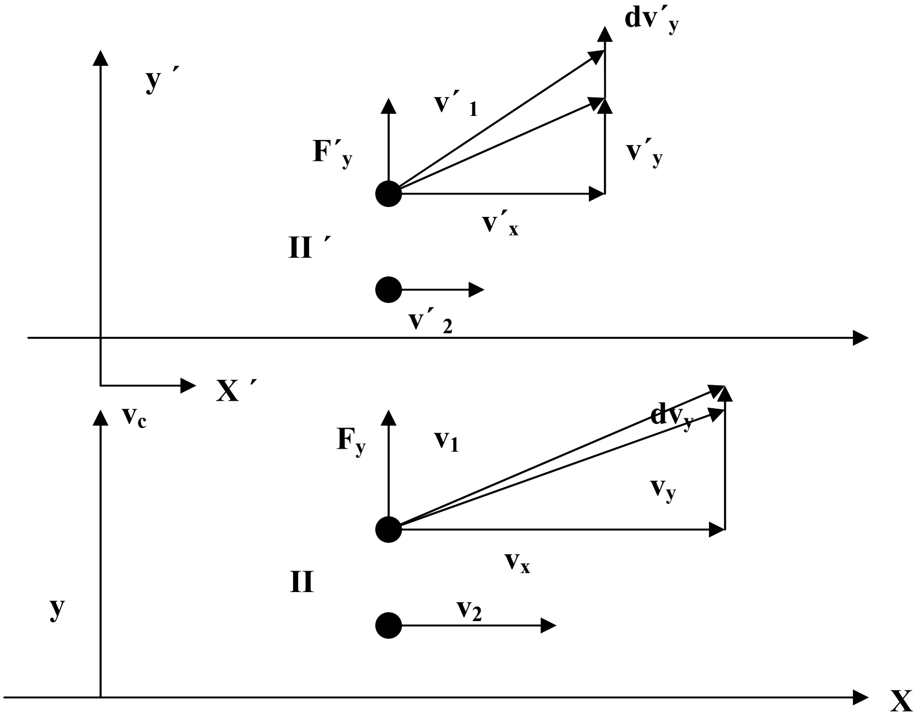
$$Fx = F'x$$

$$F(v_1; v_2) = F(v_1'; v_2')$$

Por lo tanto la única solución a la ecuación funcional es que F(v1 ; v2)=cte

Los sucesos simultáneos en el sistema de referencia (X′Y′) no lo son en el sistema de referencia (XY),no queda claro la dependencia de la fuerza con la velocidad, sin embargo el cambio de los valores (**v’1**;**v’2)**, por los opuestos (-**v’1** ; -**v’2**), dejan invariable la fuerza longitudinal en ambos sistemas de referencia ,pero las velocidades en (XY) cambian, por tanto esto establece de forma definitiva la invariancia de la fuerza longitudinal con la velocidad

Se realiza a continuación el calculo para la fuerza transversal en el caso mas general de acuerdo al esquema:



$$Fy = \frac{dp_Y}{dt}$$

$$p_Y = \frac{m.v_Y}{\sqrt{1 - v_1{}^2 / c^2}} = \frac{m.v_Y}{\sqrt{1 - (v_X{}^2 + v_Y{}^2)/c^2}}$$

$$\frac{dp_Y}{dt} = m.\left[\frac{dv_Y / dt}{\sqrt{1 - v_1{}^2 / c^2}} + \frac{v_Y{}^2.(dv_Y / dt)}{c^2(1 - v_1{}^2 / c^2)^{3/2}}\right] \quad \textbf{(11)}$$

$$dt = \frac{1 + v_C v'_X / c^2}{\sqrt{1 - v_C{}^2 / c^2}}.dt'$$

$$v_Y = \frac{v'_Y.\sqrt{1 - v_C{}^2 / c^2}}{1 + \frac{v_C v'_X}{c^2}} \quad \textbf{(12)}$$

$$v_X = \frac{v_C + v'_X}{1 + \frac{v_C v'_X}{c^2}} \quad \textbf{(13)}$$

Componiendo v_1 de acuerdo a (12) y (13)

$$v_1{}^2 = \frac{(v_C + v'_X)^2}{\left(1+\dfrac{v_C v'_X}{c^2}\right)^2} + \frac{v'_Y{}^2(1-v_C{}^2/c^2)}{\left(1+\dfrac{v_C v'_X}{c^2}\right)^2}$$

Luego de realizar las operaciones correspondientes, y operando para obtener el termino $\left(1-\dfrac{v_1{}^2}{c^2}\right)$ resulta:

$$1-\frac{v_1{}^2}{c^2} = \frac{(1-v_1'^2/c^2)(1-v_C{}^2/c^2)}{\left(1+\dfrac{v_C v'_X}{c^2}\right)} \qquad \textbf{(14)}$$

Introduciendo adecuadamente el valor de (14) en (11)

$$Fy = m\left[\frac{1+v_C v'_X/c^2}{\sqrt{1-v_1'^2/c^2}.\sqrt{1-v_C{}^2/c^2}} + \frac{v_Y'^2(1-v_C{}^2/c^2)(1+v_C v'_X/c^2)^3}{c^2\left(1+\dfrac{v_C v'_X}{c^2}\right)^2(1-v_1'^2/c^2)^{3/2}(1-v_C{}^2/c^2)^{3/2}}\right].$$
$$\frac{\sqrt{1-v_C{}^2/c^2}.dv'_Y}{(1+v_C v'_X/c^2)(1+v_C v'_X/c^2)}.\frac{\sqrt{1-v_C{}^2/c^2}}{dt'}$$

$$Fy = m.\frac{\sqrt{1-v_C{}^2/c^2}}{1+v_C v'_X/c^2}\left[\frac{1}{\sqrt{1-v_1'^2/c^2}} + \frac{v_Y'^2}{c^2(1-v_1'^2/c^2)}\right].\frac{dv'_Y}{dt'}$$

De la relación de Fy con respecto a: $v_1;v_X;v_Y$, que debe ser idéntica a la de $F'y$ con respecto a $v_1';v'_X;v'_Y$,la ultima igualdad nos da la relación entre Fy y $F'y$

$$Fy = \frac{\sqrt{1-v_C{}^2/c^2}}{1+\dfrac{v_C v'_X}{c^2}}.F'y$$

La variación de la componente v_Y representada en el esquema implica una variación en la componente longitudinal del impulso p_X ,y por consiguiente la existencia de una fuerza en tal dirección Fx

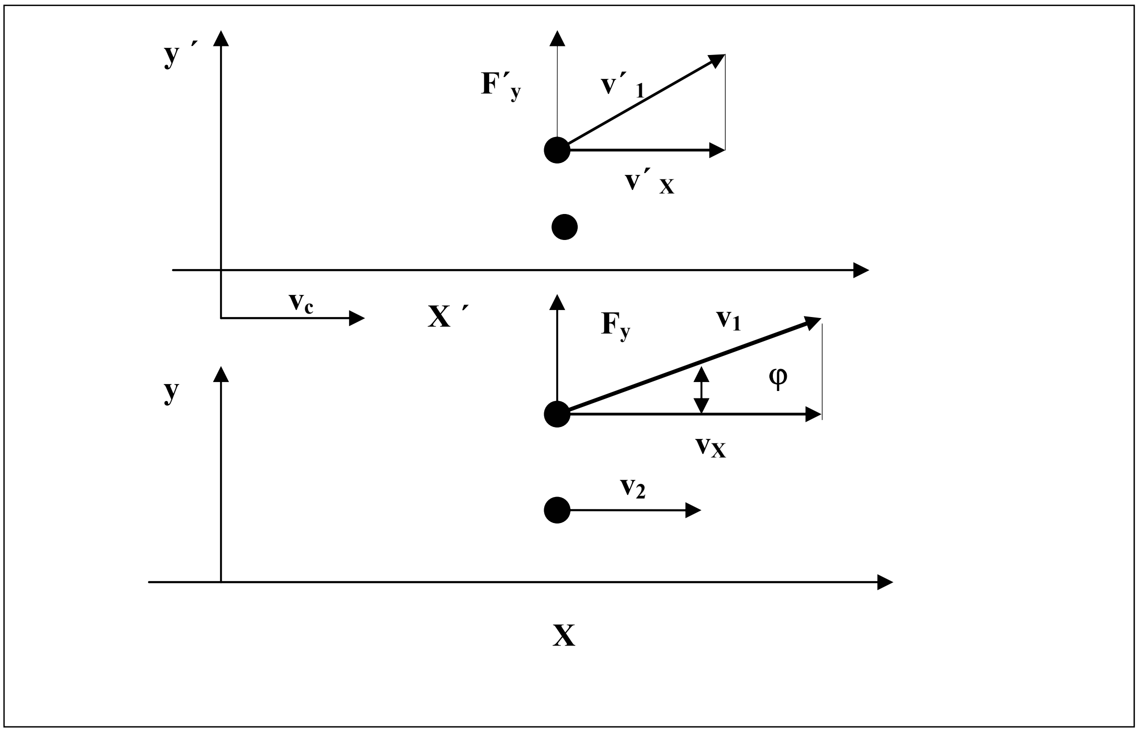
$$p_X = \frac{m.v_X}{\sqrt{1-(v_X{}^2+v_Y{}^2)/c^2}}$$

$$dp_X = \frac{m.v_X v_Y}{c^2(1-v_1{}^2/c^2)^{3/2}}.dv_Y$$

Para simplificar el esquema, vamos a considerar que $dv_X = 0$,de la relación entre Fy y F'y :

$$Fy = \frac{\sqrt{1-v_C{}^2/c^2}}{1+\frac{v_C v'_X}{c^2}}.F'y$$

Procediendo como en el caso anterior que era con vectores de velocidades paralelos



$$v'_2 = 0$$

$$v_C = v_2$$

$$Fy = \frac{\sqrt{1-v_2{}^2/c^2}}{1+\frac{v_2 v'_X}{c^2}}.F'y$$

$$v'_X = \frac{v_X - v_2}{1-v_2 v_X/c^2}$$

$$1+\frac{v_2 v'_X}{c^2} = 1+\frac{v_X v_2 - v_2{}^2}{c^2(1-v_2 v_X/c^2)}$$

$$1+\frac{v_2 v'_X}{c^2} = \frac{1-v_2{}^2/c^2}{(1-v_2 v_X/c^2)}$$

$$Fy = \frac{1 - v_X v_2 / c^2}{\sqrt{1 - v_2{}^2 / c^2}}.F'y$$

Considerando que F'y es una constante según el sistema de referencia (x'y'):

Podemos escribir en forma definitiva para este caso mas general de fuerza transversal:

$$Fy = \frac{1 - v_1 v_2 . \cos\varphi / c^2}{\sqrt{1 - v_2{}^2 / c^2}}.Fy_0$$

■ **CONDICION DE SIMETRIA**

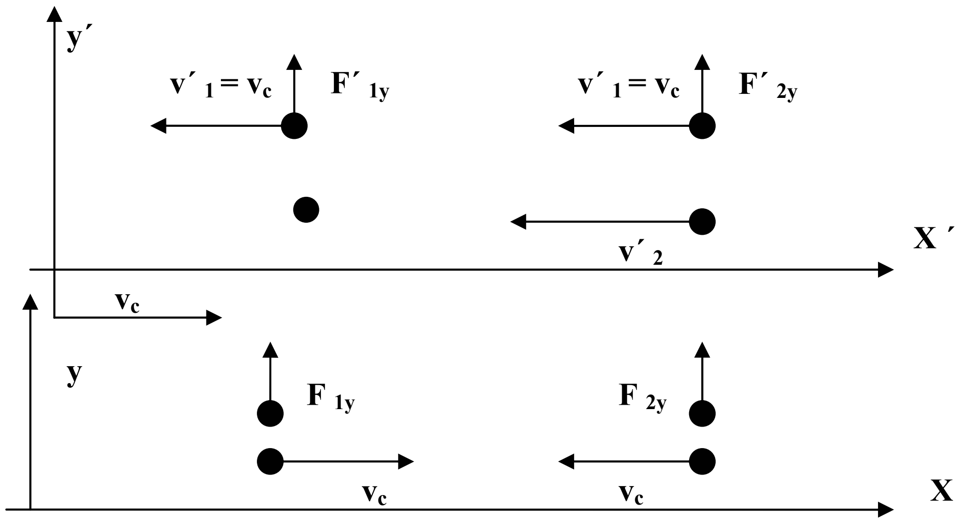
Al estudiar las fuerzas transversales, se estableció al comienzo de esta sección la siguiente ecuación funcional

$$F\left[\left(\frac{v_C + v_1}{1 + \frac{v_C v_1}{c^2}}\right);\left(\frac{v_C + v_2}{1 + \frac{v_C v_2}{c^2}}\right)\right] = \frac{\sqrt{1 - v_C{}^2 / c^2}}{1 + \frac{v_C v_1}{c^2}}.F(v_1 ; v_2)$$

Hallándose para la misma la solución general:

$$F(v_1 ; v_2) = \frac{1 - v_1 v_2 / c^2}{\sqrt{1 - v_2{}^2 / c^2}}.\widehat{F}\left(\frac{v_1 - v_2}{1 - v_1 v_2 / c^2}\right)$$

Siendo $\widehat{F}$, función arbitraria del argumento .Vamos a demostrar que la función utilizada hasta ahora $F(v_1 ; v_2) = \dfrac{1 - v_1 v_2 / c^2}{\sqrt{1 - v_2{}^2 / c^2}}$,cumple además con la condición independiente que se desprende del esquema que sigue



Se presenta la fuerza transversal para dos pares de partículas. Dado la simetría de la situación física en el sistema (xy), y la isotropía del espacio debe cumplirse:

$$F_{1Y} = F_{2Y}$$

De lo cual se desprende que: $F'_{1Y} = F'_{2Y}$

$$F'_{1Y} = \frac{1 - v_1' v_2' / c^2}{\sqrt{1 - v_2'^2 / c^2}} . F_{Y0}$$

$$v_2' = 0$$

$$F'_{1Y} = F_{Y0}$$

Para el segundo par:

$$v_2' = 2v_C / (1 + v_C{}^2 / c^2) = 2v_1' / (1 + v_1'^2 / c^2)$$

$$F'_{2Y} = \frac{1 - v_1' . 2v_1' / (1 + v_1'^2 / c^2)}{\sqrt{1 - \dfrac{4v_1'^2}{c^2 (1 + v_1'^2 / c^2)}}} . F_{Y0}$$

$$F'_{2Y} = \frac{(1 - v_1'^2 / c^2)}{(1 + v_1'^2 / c^2)} . \frac{F_{Y0}}{\sqrt{\dfrac{(1 + v_1'^2 / c^2) - 4v_1'^2 / c^2}{(1 + v_1'^2 / c^2)^2}}}$$

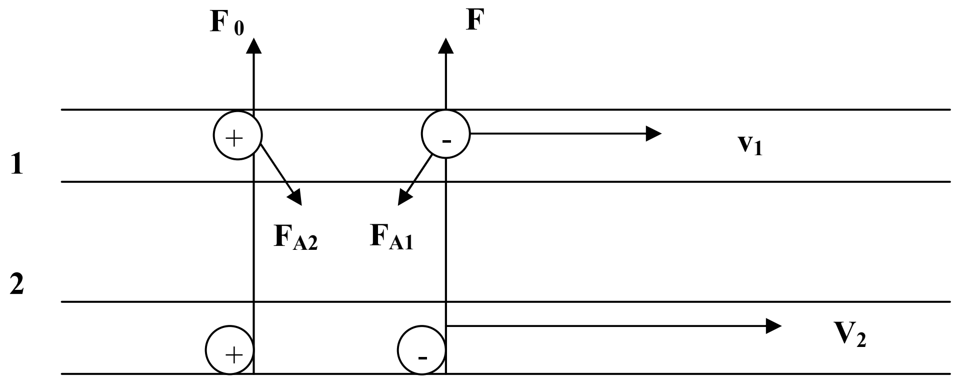
Realizando las operaciones correspondientes resulta

$$F'_{2Y} = F_{Y0} \Rightarrow F'_{2Y} = F'_{1Y}$$

De esta manera se cumple la condición de simetría

■ FUERZAS MAGNETICAS EN RELATIVIDAD

Veamos que resultados se obtienen al aplicar la formula para la fuerza transversal a la interacción entre dos conductores eléctricos paralelos



Al no existir corriente eléctrica en ninguno de los conductores las fuerzas de repulsión entre los pares de cargas de igual signo a ambos lados se equilibran con las fuerzas de atracción entre los pares de cargas opuestas en ambos lados.

Al haber corriente eléctrica en ambos conductores, esto significa un movimiento ordenado de cargas eléctricas negativas (electrones), en tanto que las cargas positivas (núcleos), permanecen en reposo.

Si se consideran las fuerzas sobre el conductor (1), la resultante F_R

$$F_R = F_0 - \frac{1 - v_1 v_2}{\sqrt{1 - v_2{}^2 / c^2}} .F_{A1} - \frac{1 - v_1 v_2 / c^2}{\sqrt{1 - v_2{}^2 / c^2}} .F_{A2} + \frac{1 - v_1 v_2 / c^2}{\sqrt{1 - v_2{}^2 / c^2}} F_0$$

$F_0 =$ fuerza de repulsión en reposo

$F_{A1} ; F_{A2}$ fuerzas de atracción en reposo

En $F_{A1} ; v_2 = 0$ (núcleo en reposo)

En F_{A2} ; $v_2 = v_2$ (velocidad del electrón)

$v_1 = 0$ (núcleo en reposo)

La resultante:

$$F_M = -\frac{v_1 v_2 / c^2}{\sqrt{1 - v_2{}^2 / c^2}}.F_0$$

Es la fuerza magnética, para cargas en reposo, la formula de Coulomb :

$$F_0 = \frac{1}{4\pi.\varepsilon_0}\frac{q_1 q_2}{r^2}$$

Y la fuerza magnética puede escribirse como sigue:

$$F_M = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}.\frac{v_1 v_2}{c^2\sqrt{1 - v_2{}^2 / c^2}}.\frac{q_1 q_2}{r^2} \quad \textbf{(15)}$$

Si tenemos que la fuerza depende del producto de las velocidades v1 y v2 de los electrones en los conductores, eso quiere decir que dependen del producto de las corrientes $I_1 e I_2$ que circulan por estos.

El análogo clásico de la formula (15) se obtiene de la fuerza de Lorentz:

$$F_M = q_1.v_1.B$$

$$B = \mu_0.H$$

$$H = \frac{q_2.v_2}{4\pi.r^2}$$

$$F_M = \frac{\mu_0.q_2 v_2.q_1 v_1}{4\pi.r^2} \quad \textbf{(16)}$$

De la comparación de las expresiones (15) y (16), salvo el radical coinciden si:

$$\mu_0 = \frac{1}{\varepsilon_0.c^2}$$

▪ SISTEMAS DE REFERENCIA ACELERADOS EN RELATIVIDAD

Hasta aquí se aplicaron los principios relativistas (Todos los sistemas de referencia inerciales son equivalentes y la velocidad de la luz es la misma medida en todos ellos). A sistemas de referencia con movimiento relativo uniforme. El resultado obtenido fue un nuevo formalismo matemático para la dinámica, la relación masa-energía, la relación fuerza-velocidad, etc.

Existe la posibilidad de aplicar los siguientes principios a sistemas de referencia con movimiento relativo acelerado:

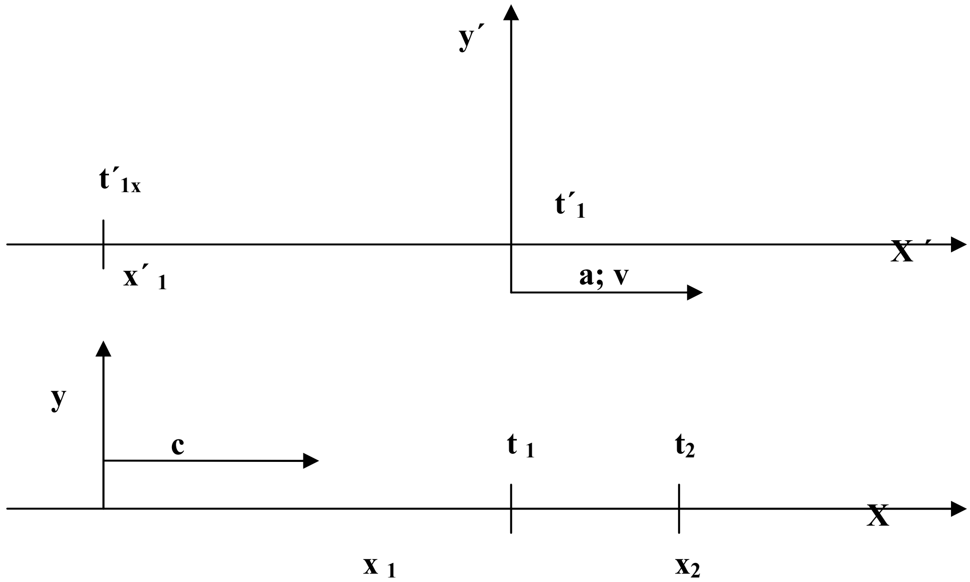
■ Principio de Relatividad

Dos sistemas de referencia con igual aceleración y velocidad con respecto a un tercero considerado en reposo son similares entre si.

■ Principio de Invariancia

La velocidad de la luz en el vacío en los sistemas de referencia acelerados es constante e igual a (c)

Partiendo de estos dos principios, pueden ser halladas las transformaciones para los sistemas de referencia acelerados, de modo análogo a las transformaciones de Lorentz para los sistemas de referencia inerciales. Para hacerlo se halla en primer lugar la relación entre el tiempo medido en los orígenes de los sistemas (xy) y (x′y′)



Dado que desconocemos la relación entre la marcha del tiempo de los orígenes de ambos sistemas de referencia, se indica como una función $F(t)$ a determinar

$$t_1' = F(t_1)$$
$$t_2' = F'(t_2)$$

De acuerdo al principio de relatividad, para los orígenes se debe cumplir :

$$t_{1X}' = F^{-}(t_1)$$

$F^{-}(t)$ =función inversa de $F(t)$

En el esquema, los sistemas de referencia a partir del instante $t_0 = 0$, comienzan a moverse con aceleración relativa a

Si en el instante t_0 =0, el origen de ambos sistemas coinciden, en el tiempo t_1 se habrán alejado entre si la distancia x_1 .Si en ese instante desde el origen del sistema (xy) se emite un rayo de luz hacia el origen del sistema (x'y'),el rayo lo alcanzara en el tiempo t_2 ,en el punto $x = x_2$

El origen del sistema (x'y') mide que llega al punto x_1 en el tiempo t_1' y al punto x_2 en el tiempo t_2'

Siendo $t' = F(t)$; $\begin{matrix} t_1' = F(t_1) \\ t_2' = F(t_2) \end{matrix}$

Desde el momento t_1 en que es emitido el rayo hasta que alcanza el origen(x'y')en el tiempo t_2 ,recorre :

$$x_2 = c.(t_2 - t_1).$$

El origen(x'y') recorre la distancia

$$x_2 = \frac{a.t^2}{2}$$

$$c(t_2 - t_1) = \frac{a.t_2{}^2}{2}$$
$$\frac{a.t_2{}^2}{2} - c.t_2 + c.t_1 = 0$$
$$t_2{}^2 - \frac{2c}{a}.t_2 + \frac{2c}{a}.t_1 = 0$$
$$t_2 = \frac{c}{a} + \sqrt{\frac{c^2}{a^2} - \frac{2c}{a}.t_1}$$

Desde el sistema de referencia (x'y'),se observa que el origen(xy) se desplaza con aceleración y velocidad ($-a;-v$) hasta el punto x_1' en el tiempo t_{1X}' . De acuerdo al principio de relatividad debe cumplirse:

$$t_1 = F(t_{1X}')$$
$$t_{1X}' = F^{-}(t_1)$$

De acuerdo al principio de invariancia de c ;(x'y') ve que el rayo recorre la distancia x_1' en el tiempo:

$$\Delta t' = \frac{x_1'}{c}$$

Con lo cual: $t_2' = t_{1X}' + \dfrac{x_1'}{c}$

Teniendo en cuenta que: $x_1' = \dfrac{a.t_{1X}'{}^2}{2}$

Siendo : $t'_{1X} = F^{-}(t_1)$

$$t'_2 = F^{-}(t_1) + \frac{a}{2c}\left[F^{-}(t_1)\right]^2$$

$$t'_2 = F(t_2)$$

$$F^{-}(t_1) + \frac{a}{2c}\left[F^{-}(t_1)\right]^2 = F\left(\frac{c}{a} + \sqrt{\frac{c^2}{a^2} - \frac{2c}{a}t_1}\right)$$

En forma genérica:

$$[F^{-}(t)]^2 + \frac{2c}{a}.F^{-}(t) - \frac{2c}{a}F\left(\frac{c}{a} + \sqrt{\frac{c^2}{a^2} - \frac{2c}{a}t}\right) = 0$$

Resolviendo la ecuación de 2º grado para $F^{-}(t)$

$$F^{-}(t) = \frac{c}{a} + \sqrt{\frac{c^2}{a^2} - \frac{2c}{a}F\left(\frac{c}{a} + \sqrt{\frac{c^2}{a^2} - \frac{2c}{a}t}\right)}$$

Hallar la función $F(t)$ es el equivalente a determinar el valor de K= $\sqrt{1 - v^2/c^2}$ en la cinemática relativista

En cuanto a la solución de la ecuación funcional planteada .Hay que tener en cuanta que en general la utilidad de este tipo de ecuaciones no esta tanto en algún método de resolución de las mismas (que es incierto). Sino en el hecho de que introduciendo en las mismas las funciones convenientes nos permiten comprobar matemáticamente la validez de las formulas propuestas.

Si probamos con:

$$F(t) = t + B.t^2$$

Siendo B un coeficiente a determinar:

$F^{-}(t)$ significa hallar t a partir de $F(t)$

$$t^2 + \frac{t}{B} - \frac{F(t)}{B} = 0$$

$$t = -\frac{1}{2B} + \sqrt{\frac{1}{4B^2} + \frac{F(t)}{B}}$$

$$F^{-}(t) = -\frac{1}{2B} + \sqrt{\frac{1}{4B^2} + \frac{t}{B}}$$

Introduciendo en el segundo termino de la ecuación funcional la solución propuesta , $F(t) = t + B.t^2$,y reemplazando en esta función el valor t por $\frac{c}{a} + \sqrt{\frac{c^2}{a^2} - \frac{2c}{a}t}$

$$F^{-}(t)=\frac{c}{a}+\sqrt{\frac{c^2}{a^2}-\frac{2c}{a}\left[\frac{c}{a}+\sqrt{\frac{c^2}{a^2}-\frac{2c}{a}t}+B\left(\frac{c}{a}+\sqrt{\frac{c^2}{a^2}-\frac{2c}{a}t}\right)^2\right]}$$

$$B\left(\frac{c}{a}+\sqrt{\frac{c^2}{a^2}-\frac{2c}{a}t}\right)^2=B\frac{c^2}{a^2}+\frac{2Bc}{a}\sqrt{\frac{c^2}{a^2}-\frac{2c}{a}t}+B\frac{c^2}{a^2}-\frac{2Bc}{a}t$$

Haciendo que:

$$\frac{2Bc}{a}=-1\Rightarrow B=-\frac{a}{2c}$$

$$F^{-}(t)=\frac{c}{a}+\sqrt{\frac{c^2}{a^2}-\frac{2c}{a}\left[\frac{c}{a}+\frac{2Bc^2}{a^2}-\frac{2Bc}{a}t\right]}$$

$$-\frac{1}{2B}+\sqrt{\frac{1}{4B^2}+\frac{t}{B}}=\frac{c}{a}+\sqrt{\frac{c^2}{a^2}-\frac{2c^2}{a^2}-\frac{4Bc^3}{a^3}+\frac{4Bc^2}{a^2}t}$$

Reemplazando B por su equivalente $-a/2c$

$$\frac{c}{a}+\sqrt{\frac{c^2}{a^2}-\frac{2c}{a}t}=\frac{c}{a}+\sqrt{\frac{c^2}{a^2}-\frac{2c}{a}t}$$

De esta manera determinamos el coeficiente B = - a /2c, y hallamos la función solución de la ecuación funcional planteada

$$F(t)=t-\frac{a}{2c}.t^2$$

$$t'=t-\frac{a}{2c},t^2$$

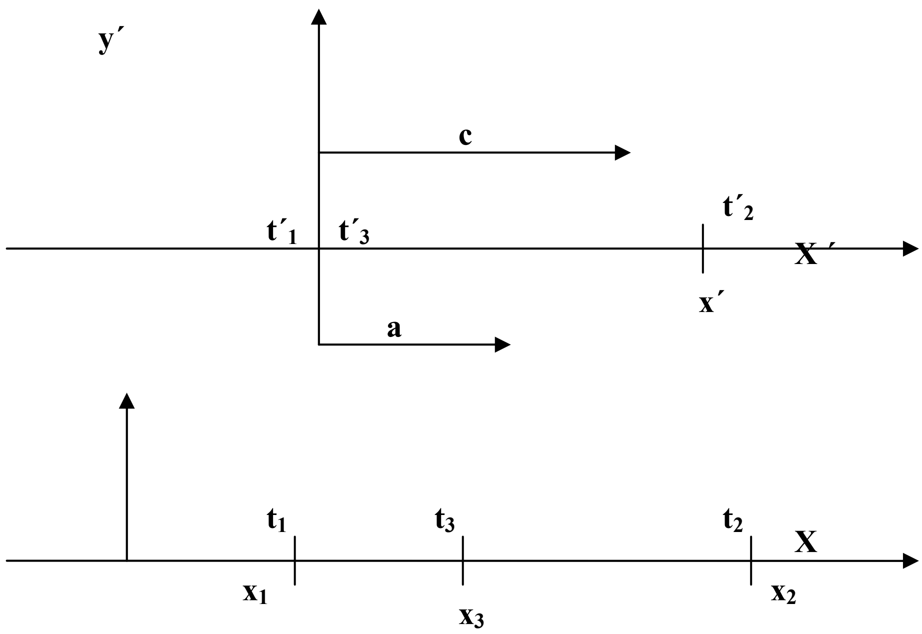
$$t'=t\left(1-\frac{at}{2c}\right)$$

Cuando $at=c$ $\quad t'=t/2$

Esta formula es valida para sistemas de referencia con aceleración y velocidad opuestas con respecto a sistemas de referencia en reposo .Y tiene sentido físico si $at\leq c$

Hay que tener en cuenta que t' es el tiempo medido **en el origen** del sistema **(**x'y')

Para hallar la transformación de coordenadas entre ambos sistemas de referencia podemos recurrir al esquema que sigue:



En el tiempo t_1' desde el origen del sistema de referencia (x′y′),se emite un rayo de luz hacia el punto x',a donde llega en el tiempo t_2'.Desde el sistema de referencia (xy) se mide que el punto x' coincide con el punto x_2 en el tiempo t_2.A continuación al reflejarse en x' el rayo vuelve al origen (x′y′) en el tiempo t_3',midiéndose en el sistema (xy) el tiempo t_3.

Para t_1' y t_3' son validas las relaciones ya halladas:

$$t_1' = t_1 - \frac{a}{2c}.t_1{}^2$$

$$t_3' = t_3 - \frac{a}{2c}.t_3{}^2$$

Para hallar el valor de t_3, consideramos que el rayo de luz en el sistema (xy) recorre el doble de la distancia de x_1 a x_2 menos la distancia que recorre el origen(x′y′)en el tiempo $(t_3 - t_1)$

$$c(t_3-t_1)=2(x_2-x_1)-\left[v_1(t_3-t_1)+\frac{a(t_3-t_1)^2}{2}\right]$$
$$c(t_3-t_1)=2(x_2-x_1)-\left[at_1(t_3-t_1)+\frac{a(t_3{}^2-2t_1.t_3+t_1{}^2)}{2}\right]$$
$$c(t_3-t_1)=2(x_2-x_1)-a.t_1t_3+at_1{}^2-\frac{at_3{}^2}{2}+a.t_1t_3-\frac{at_1{}^2}{2}$$
$$ct_3-ct_1=2(x_2-x_1)+\frac{at_1{}^2}{2}-\frac{at_3{}^2}{2}$$

Multiplicando por $(2/a)$ y agrupando términos se obtiene :

$$t_3{}^2+\frac{2}{a}t_3-\left(\frac{2c}{a}t_1+t_1{}^2\right)-\frac{4}{a}(x_2-x_1)=0$$
$$t_3=-\frac{c}{a}+\sqrt{\frac{c^2}{a^2}+\frac{2c}{a}t_1+t_1{}^2+\frac{4}{a}(x_2-x_1)}$$
$$t_3=-\frac{c}{a}+\sqrt{\left(\frac{c}{a}+t_1\right)^2+\frac{4}{a}(x_2-x_1)}$$

De acuerdo al esquema utilizado existe la siguiente relación entre t_3' y t_1', determinamos x′

$$t_3'=t_1'+\frac{2x'}{c}$$
$$t_1'+\frac{2x'}{c}=t_3-\frac{a}{2c}t_3{}^2$$
$$x'=\frac{c}{2}\left(t_3-\frac{a}{2c}t_3{}^2-t_1'\right) \quad \textbf{(17)}$$

En el esquema t_2 y x_2 representan genéricamente el valor de t y x .Para realizar la transformación es necesario sustituir el valor de t_1 y x_1 por sus equivalentes en función de t_2 y x_2 .

De acuerdo al esquema:

$$t_2=t_1+\frac{x_2-x_1}{c}$$
$$t_2=t_1+\frac{x_2}{c}-\frac{at_1{}^2}{2c}$$
$$t_1{}^2-\frac{2c}{a}t_1+\frac{2c}{a}\left(t_2-\frac{x_2}{c}\right)=0$$

$$t_1=\frac{c}{a}+\underbrace{\sqrt{\frac{c^2}{a^2}+\frac{2x_2}{a}-\frac{2c}{a}t_2}}_{B} \quad \textbf{(18)}$$

$$t_3 = -\frac{c}{a} + \sqrt{\left(\frac{2c}{a} + B\right)^2 + \frac{4}{a}(x_2 - x_1)}$$

$$x_1 = c(t_2 - t_1) + x_2$$

$$t_3 = -\frac{c}{a} + \sqrt{\left(\frac{2c}{a} + B\right)^2 + \frac{4c}{a}(t_2 - t_1)}$$

$$t_3 = -\frac{c}{a} + \sqrt{\left(\frac{2c}{a} + B\right)^2 + \frac{4c}{a}\left(t_2 - \frac{c}{a} - B\right)}$$

$$t_3 = -\frac{c}{a} + \sqrt{\frac{4c^2}{a^2} + \frac{4c}{a}B + B^2 + \frac{4c}{a}t_2 - \frac{4c^2}{a^2} - \frac{4cB}{a}}$$

$$t_3 = -\frac{c}{a} + \sqrt{B^2 + \frac{4c}{a}t^2}$$

$$t_3 = -\frac{c}{a} + \sqrt{\frac{c^2}{a^2} + \frac{2x_2}{a} - \frac{2c}{a}t_2 + \frac{4c}{a}t_2}$$

$$t_3 = -\frac{c}{a} + \sqrt{\frac{c^2}{a^2} + \frac{2x_2}{a} + \frac{2c}{a}t_2} \quad \textbf{(19)}$$

Reemplazando t_3 **(19),** y , $t_1' = t_1 - (a/2c)t_1{}^2$ **(18),** por sus equivalentes en la expresión para x′**(17)**

$$x' = \frac{c}{2}\left[\begin{array}{l} -\frac{c}{a} + \sqrt{\frac{c^2}{a^2} + \frac{2x_2}{a} + \frac{2c}{a}t_2} - \frac{a}{2c}\left(-\frac{c}{a} + \sqrt{\frac{c^2}{a^2} + \frac{2x_2}{a} + \frac{2c}{a}t_2}\right)^2 - \\ \left(\frac{c}{a} + \sqrt{\frac{c^2}{a^2} + \frac{2x_2}{a} - \frac{2c}{a}t_2}\right) + \frac{a}{2c}\left(\frac{c}{a} + \sqrt{\frac{c^2}{a^2} + \frac{2x_2}{a} - \frac{2c}{a}t_2}\right)^2 \end{array}\right]$$

Si hacemos que:

$$B_1 = \sqrt{\frac{c^2}{a^2} + \frac{2x_2}{a} + \frac{2c}{a}t_2}$$

$$B_2 = \sqrt{\frac{c^2}{a^2} + \frac{2x_2}{a} - \frac{2c}{a}t_2}$$

$$x' = \frac{c}{2}\left[-\frac{c}{a} + B_1 - \frac{a}{2c}\left(-\frac{c}{a} + B_1\right)^2 - \left(\frac{c}{a} + B_2\right) + \frac{a}{2c}\left(\frac{c}{a} + B_2\right)^2\right]$$

Desarrollando los cuadrados de binomio y agrupando términos se obtiene:

$$x' = \frac{c}{2}\left[-\frac{2c}{a} + 2B_1 - \frac{a}{2c}B_1{}^2 + \frac{a}{2c}B_2{}^2\right]$$

$$x' = \frac{c}{2}\left[-\frac{2c}{a} + 2\sqrt{\frac{c^2}{a^2} + \frac{2x_2}{a} + \frac{2c}{a}t_2} + \frac{a}{2c}(B_2{}^2 - B_1{}^2)\right]$$

$$x' = \frac{c}{2}\left[-\frac{2c}{a} + 2\sqrt{\frac{c^2}{a^2} + \frac{2x_2}{a} + \frac{2c}{a}t_2} - \frac{a}{2c}.\frac{4c}{a}t_2\right]$$

$$x' = \frac{c}{2}\left[-2t_2 + 2\sqrt{\frac{c^2}{a^2} + \frac{2x_2}{a} + \frac{2c}{a}t_2} - \frac{2c}{a}\right]$$

$$x' = c\left(-t_2 + \frac{c}{a}\sqrt{1 + \frac{2ax_2}{c^2} + \frac{2at_2}{c}} - \frac{c}{a}\right)$$

En forma genérica y definitiva se escribe:

$$x' = \frac{c^2}{a}\left(\sqrt{1 + \frac{2ax}{c^2} + \frac{2at}{a}} - 1\right) - c.t$$

Esta es la transformación de coordenadas para sistemas de referencia mutuamente acelerados.

Para hallar las transformaciones para el tiempo, de acuerdo al esquema:

$$t_2' = t_1' + \frac{x'}{c}$$

$$t_2' = t_1 - \frac{a}{2c}t_1{}^2 + \frac{1}{c}\left[\frac{c^2}{a}\left(\sqrt{1 + \frac{2ax_2}{c^2} - \frac{2at_2}{c^2}} - 1\right) - ct_2\right] \quad \textbf{(20)}$$

Recordando la expresión **(18)** para t_1,la introducimos en la **(20)**

$$t_2' = \left(\frac{c}{a} + B_2\right) - \frac{a}{2c}\left(\frac{c}{a} + B_2\right)^2 + \frac{c}{a}(B_1 - 1) - t_2$$

Desarrollando el cuadrado de binomio y agrupando términos :

$$t_2' = -\frac{c}{2a} - \frac{a}{2c}B_2{}^2 + \frac{c}{a}B_1 - t_2$$

Poniendo el valor de B_2

$$t_2' = -\frac{c}{2a} - \frac{a}{2c}\left(\frac{c^2}{a} + \frac{2x_2}{a} - \frac{2c}{a}t_2\right) + \frac{c}{a}B_1 - t_2$$

$$t_2' = -\frac{c}{a} - \frac{x_2}{c} + \frac{c}{a}B_1$$

Recordando el valor de B_1

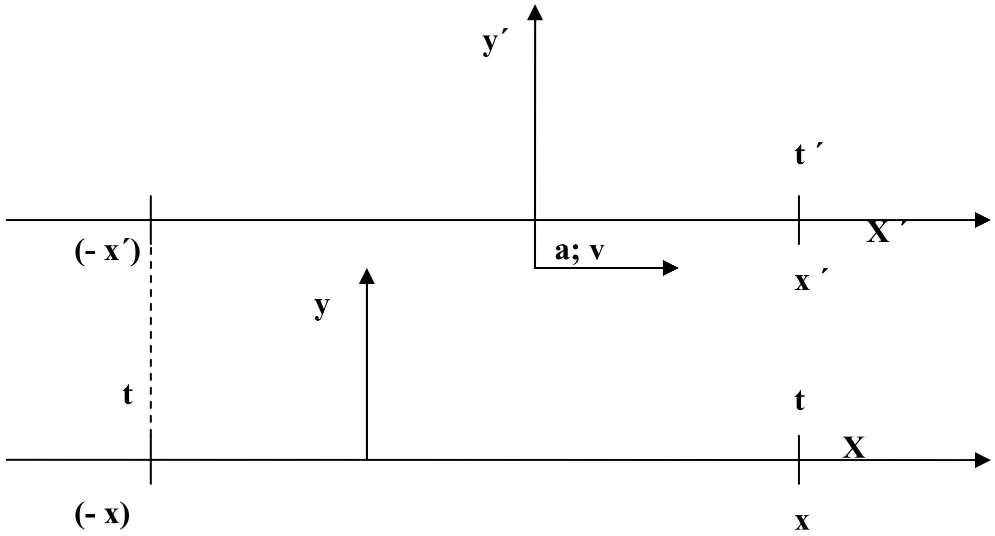
$$t_2' = \frac{c}{a}\left(\sqrt{1+\frac{2ax_2}{c^2}+\frac{2at_2}{c}}-1\right)-\frac{x_2}{c}$$

En forma genérica queda finalmente:

$$t' = \frac{c}{a}\left(\sqrt{1+\frac{2ax}{c^2}+\frac{2at}{c}}-1\right)-\frac{x}{c}$$

De esta manera han sido halladas las transformaciones directas para sistemas de referencia acelerado, análogas a las transformaciones de Lorentz para sistemas inerciales de referencia.

Para hallar las transformaciones inversas, del sistema de referencia (x'y') al (xy), se procede de acuerdo al esquema que sigue



Comenzamos escribiendo las transformaciones directas:

$$x' = \frac{c^2}{a}\left(\sqrt{1+\frac{2ax}{c^2}+\frac{2at}{c}}-1\right)-ct$$

$$t' = \frac{c}{a}\left(\sqrt{1+\frac{2ax}{c^2}+\frac{2at}{c}}-1\right)-\frac{x}{c}$$

Aceptando la validez de estas formulas para valores negativos de x , y tomando en cuenta el modulo de $(-x) \equiv x$, se obtiene

$$x' = \frac{c^2}{a}\left(\sqrt{1 - \frac{2ax}{c^2} + \frac{2at}{c}} - 1\right) - ct$$

$$t' = \frac{c}{a}\left(\sqrt{1 - \frac{2ax}{c^2} + \frac{2at}{c}} - 1\right) + \frac{x}{c}$$

En estas formulas el valor obtenido para x’ es el mismo que al comienzo, si consideramos el valor del modulo de x’,del mismo modo a lo hecho para x se debe escribir :

$$x' = \frac{c^2}{a}\left(1 - \sqrt{1 - \frac{2ax}{c^2} + \frac{2at}{c}}\right) + ct$$

Para el tiempo la formula queda invariable:

$$t' = \frac{c}{a}\left(\sqrt{1 - \frac{2ax}{c^2} + \frac{2at}{c}} - 1\right) + \frac{x}{c}$$

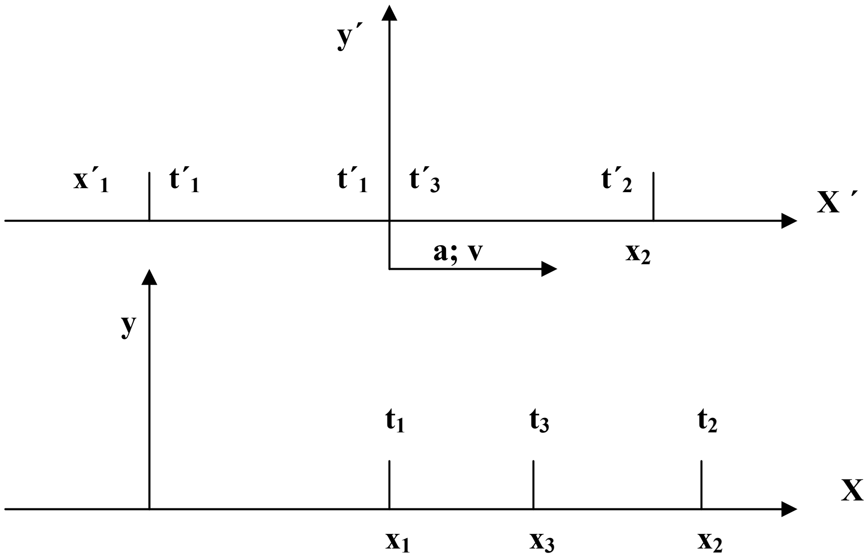
Dada la simetría de la situación física, las transformaciones de la parte negativa del sistema (xy) al (x’y’), son iguales a las transformaciones de la parte positiva del sistema (x’y’) al (xy)

$$x = \frac{c^2}{a}\left(1 - \sqrt{1 - \frac{2ax'}{c^2} + \frac{2at'}{c}}\right) + ct'$$

$$t = \frac{c}{a}\left(\sqrt{1 - \frac{2ax'}{c^2} + \frac{2at'}{c}} - 1\right) + \frac{x'}{c}$$

■ Relación entre sistemas de referencia inerciales y acelerados

Para hallar las transformaciones de abscisas y tiempo entre un sistema de referencia inercial y un sistema de referencia que se desplaza con una aceleración determinada, podemos utilizar los resultados de la relatividad especial en el esquema que sigue; similar al esquema utilizado antes para hallar las transformaciones entre sistemas de referencia acelerados



$$t_1' = \int_0^{t1} \sqrt{1 - a^2 t^2 / c^2}.dt$$
$$t_3' = \int_0^{t3} \sqrt{1 - a^2 t^2 / c^2}.dt$$

(21) Validas para el origen(x'y')

$$t_2' = t_1' + \frac{x_2'}{c}$$
$$t_3' = t_1' + \frac{2x_2'}{c}$$
$$2x_2' = c.(t_3' - t_1')$$
$$2x_2' = c.\int_{t1}^{t3} \sqrt{1 - a^2 t^2 / c^2}.dt$$
$$x_2' = \frac{c^2}{4a}\left(sen^{-} \frac{at_3}{c} - sen^{-} \frac{at_1}{c} \right) + \frac{c}{4}\left(t_3 \sqrt{1 - \frac{a^2 t_3{}^2}{c^2}} - t_1 \sqrt{1 - \frac{a^2 t_1{}^2}{c^2}} \right) \quad \textbf{(22)}$$

Siendo:

$$t_1 = \frac{c}{a} + \sqrt{\frac{c^2}{a^2} + \frac{2x_2}{a} - \frac{2c}{a} t_2}$$
$$t_3 = -\frac{c}{a} + \sqrt{\frac{c^2}{a^2} + \frac{2x_2}{a} + \frac{2c}{a} t_2}$$

En el esquema $(x_2' ... t_2')$ son en forma genérica el tiempo y la distancia (x';y')

La transformación para el tiempo puede obtenerse a través de la formula:

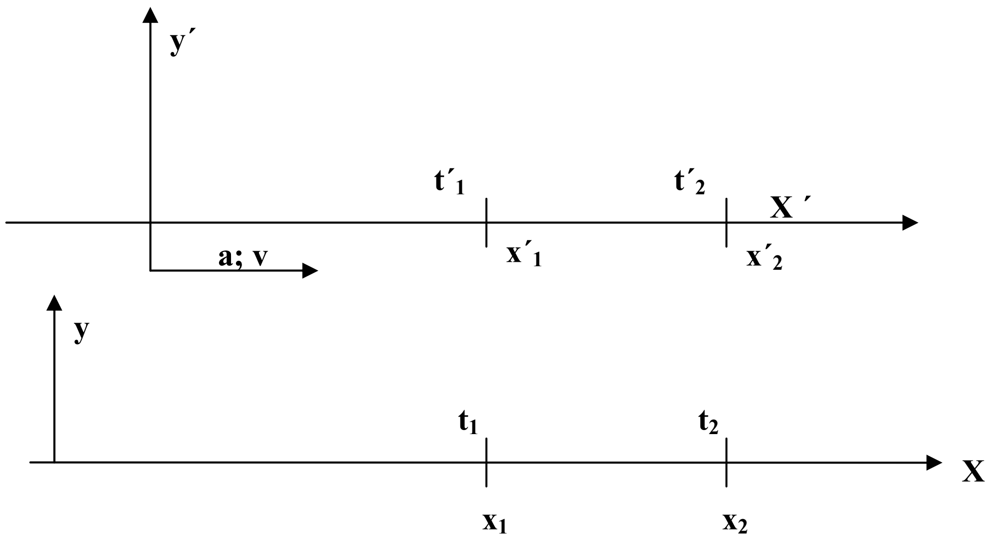
$$t_2' = t_1' + \frac{x_2'}{c}$$

Realizando las operaciones con las integrales de (21) y el valor de (22), resulta:

$$t_2' = \frac{c}{4a}\left(sen^{-} \frac{at_3}{c} + sen^{-} \frac{at_1}{c} \right) + \frac{t_3}{4}\sqrt{1 - \frac{a^2 t_3{}^2}{c^2}} + \frac{t_1}{4}\sqrt{1 - \frac{a^2 t_1{}^2}{c^2}}$$

■ **Longitud del segmento**

Dado un segmento de recta en el sistema de referencia (xy) de longitud L .En el sistema de referencia (x'y'), tal segmento mide L**'.** Si los sistemas de referencia tienen aceleración relativa entre si, la relación entre L y L**'** la podemos hallar como se muestra:



$$x_2' = \frac{c^2}{a}\left(\sqrt{1 + \frac{2ax_2}{c^2} + \frac{2at_2}{c}} - 1 \right) - ct_2$$

$$x_1' = \frac{c^2}{a}\left(\sqrt{1 + \frac{2ax_1}{c^2} + \frac{2at_1}{c}} - 1 \right) - ct_1$$

$$t_2' = \frac{c}{a}\left(\sqrt{1 + \frac{2ax_2}{c^2} + \frac{2at_2}{c}} - 1 \right) - \frac{x_2}{c}$$

$$t'_1 = \frac{c}{a}\left(\sqrt{1 + \frac{2ax_1}{c^2} + \frac{2at_1}{c}} - 1 \right) - \frac{x_1}{c} \qquad \textbf{(23)}$$

Hay que tener en cuenta que L**'** se define siendo $t_1' = t_2'$, entonces:

Igualando entre si el par de expresiones (23)

$$\sqrt{1+\frac{2ax_2}{c^2}+\frac{2at_2}{c}}-\frac{ax_2}{c^2}=\sqrt{1+\frac{2ax_1}{c^2}+\frac{2at_1}{c}}-\frac{ax_1}{c^2} \quad \textbf{(24)}$$

Restando a su vez las expresiones para x_2' y x_1'

$$x'_2-x'_1=\frac{c^2}{a}\left(\sqrt{1+\frac{2ax_2}{c^2}+\frac{2at_2}{c}}-\sqrt{1+\frac{2ax_1}{c^2}+\frac{2at_1}{c}}\right)+c(t_1-t_2) \quad \textbf{(25)}$$

De la comparación de (24) con (25)

$$x_2'-x_1'=\frac{c^2}{a}.\frac{(ax_2-ax_1)}{c^2}+c(t_1-t_2)$$

De la relación obligada entre t_2 y t_1,la obtenemos despejando t_2 de (24)

$$\frac{2at_2}{c}=\left[\sqrt{1+\frac{2ax_1}{c^2}+\frac{2at_1}{c}}+\frac{a}{2c}(x_2-x_1)\right]^2-\frac{2ax_2}{c^2}-1 \quad \textbf{(26)}$$

Introduciendo el valor de t_2 dado por (26) en (25)

$$x_2'-x_1'=(x_2-x_1)+c.\{t_1-\frac{c}{2a}\left[\sqrt{1+\frac{2ax_1}{c^2}+\frac{2at_1}{c}}+\frac{a}{c^2}(x_2-x_1)\right]^2+\left(\frac{x_2}{c}-\frac{c}{2a}\right)\}$$

Para el instante inicial $t_1=0$,los orígenes (xy);(x'y') coinciden y podemos escribir para este caso particular la equivalencia entre L y L**'**

$$L_0'=L_0+x_2+\frac{c^2}{a}\left[1-\left(\sqrt{1+\frac{2ax_1}{c^2}}+\frac{a}{c^2}L_0\right)^2\right]$$

Si el segmento esta ubicado entre el origen de (xy), y el punto x_2.En tal caso :

$$x_1=0$$
$$L_0=x_2$$

$$L_0'=L_0+x_2+\frac{c^2}{a}\left[1-\left(1+\frac{a}{c^2}L_0\right)^2\right]$$

$$L'_0=L_0-\frac{a}{2c^2}L_0{}^2$$