

ACERCAMIENTO DIDÁCTICO A LA DINÁMICA HAMILTONIANA-LAGRANGIANA

Joaquín González Álvarez

Algunos profesionales formados en carreras en las que la física y la matemática se imparte al nivel de los dos primeros años de pregrado, necesitan en virtud de su trabajo, frecuentemente aplicar conocimientos de la dinámica Hamiltoniana-Lagrangiana, Analítica o Superior que no han recibido académicamente. Por lo general ante esa situación buscan literatura especializada, pero suelen encontrarse con la dificultad de que ésta no les es fácil de asimilar por falta de la necesaria base documental.

Con la pretensión de minimizar un tanto la citada dificultad, hemos preparado este trabajo en el que se presentan de la manera mas asequible y directa posible los conceptos, formalismos y procedimientos propios de la dinámica Hamiltoniana, aplicados a problemas sencillos cuya solución ya conocen aplicando solamente la segunda ley de la dinámica newtoniana y que ahora verán como se llega a los mismos resultados aplicando, las ecuaciones de Lagrange y las canónicas de Hamilton. Veremos también un tratamiento elemental de la ecuación de Hamilton-Jacobi. Se hará hincapié en mostrar que estos formalismos son en definitiva otras maneras de expresar la conocida $F = m.a$, pero que aventajan a ésta por su aplicabilidad tanto a sistemas inerciales como a los que no lo son, y además por sólo involucrar relaciones entre escalares.

Previamente necesitamos advertir sobre notaciones y términos que utilizaremos:

Por q denotaremos cualquier coordenada espacial a las cuales algunas veces nos referiremos como grados de libertad.. Las derivadas totales respecto al tiempo de una variable la denotaremos "acentuando" una o dos veces según el caso, a la variable, así q' será velocidad y q'' será aceleración. El momento será $p = m.q'$ y por tanto $p' = m.q''$ será fuerza. El momento p también será otra coordenada en el espacio de las fases cuyas coordenadas son las q como abscisas y las p como ordenadas.

Aunque las ecuaciones de Lagrange constituyen un sistema de tantas ecuaciones como grados de libertad, vamos a referirnos en aras de la comprensión, sólo a casos de un solo grado de libertad y podemos escribir *la ecuación* de Lagrange así:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial q'} \right) - \frac{\partial V}{\partial q} = 0 \quad (1)$$

en donde es $L = T - V$ función lagrangiana, con T energía cinética y V energía potencial.

Veamos como (1) deviene en algo conocido.

$$L = \frac{1}{2} m q'^2 - V \text{ con lo cual, por (1):}$$

$$\frac{d}{dt} (m \cdot q') - F = 0 \text{ y por tanto: } F = m \cdot q'', \text{ que es como decir nuestra familiar } F = m \cdot a .$$

Las ecuaciones canónicas constituyen dos sistemas de ecuaciones aunque por lo ya dicho sólo necesitaremos una ecuación de cada sistema:

$$q' = \frac{\partial H}{\partial p} \quad (2)$$

$$p' = - \frac{\partial H}{\partial q} \quad (3)$$

donde $H = \frac{p^2}{2m} + V$ es la función hamiltoniana.

Veamos como también (2) y (3) nos llevan a cosas conocidas.

La (2) nos lleva a una identidad:

$$q' = \partial H / \partial p = p / m = m \cdot q' / m = q'$$

y la (3):

$$p' = - \partial V / \partial q \text{ que es la ya conocida: } F = - \partial V / \partial x .$$

Las ecuaciones de Hamilton toman singular importancia en el tratamiento de los sistemas dinámicos en el espacio de fases al cual ya hicimos referencia y mas adelante volveremos a tratar.

Nos ocuparemos ahora de la muy importante ecuación de Hamilton-Jacobi en la que interviene una magnitud llamada acción representada por S la cual está relacionada con p mediante $\partial S / \partial x = p$ para el caso de un solo grado de libertad. Si en la expresión ya vista de H despejamos $p^2 = 2m \cdot (E - V)$ vemos que:

$$(\partial S / \partial x)^2 = 2m(E - V) \quad (4)$$

una expresión de la ecuación de Hamilton-Jacobi para el caso de un solo grado de libertad.

Veamos ahora como ejemplo sencillo pero muy ilustrativo la aplicación de los métodos de la mecánica newtoniana, las ecuaciones de Lagrange y las de Hamilton a un mismo caso para mostrar la equivalencia de los tres métodos.

Tomemos el caso de la energía total del oscilador armónico simple:

$$T = \frac{m.v^2}{2} \quad V = -\frac{kx^2}{2} \quad E = T + V$$

$$E = \frac{m.q'^2}{2} - \frac{k.q^2}{2}$$

Por las ecuaciones de Lagrange:

$\frac{d}{dt}(m.q') + kq = 0$ por lo que $m.q'' = -k.q$ y lleva a la conocida $F = -k.x$ donde reconocemos a $F = m.a$ después de las pertinentes transformaciones que propone la mecánica newtoniana.

Para las ecuaciones de Hamilton tendremos en cuenta que podemos escribir $E = H$ con lo cual utilizando p y q se tendrá.

$$H = \frac{p^2}{2m} - \frac{k.q^2}{2} \quad \text{y por (3):}$$

$p' = -k.q$ o lo que es lo mismo nuestra familiar $F = -k.x$ que lleva a $F = m.a$.

Una de las mas importantes aplicaciones de la ecuación de Hamilton-Jacobi es la de servir de punto de partida para llegar a la ecuación de Schrödinger unidimensional de la mecánica cuántica por la simple sustitución de p en (4) por el operador cuántico de p para un solo grado de libertad $-\frac{i\hbar}{2\pi} \frac{\partial}{\partial x}$.

A las coordenadas q, p se les denomina coordenadas fásicas pues lo son en el plano de las fases en el cual los ejes de coordenadas serán el de abscisas, el eje de las q y el de ordenadas, el eje de las p .

Las representaciones de funciones $f(p,q)$ en el espacio de las fases, permite tratar sistemas de ecuaciones diferenciales como los de los sistemas dinámicos los cuales, sobre todo los no lineales, resultan difícil, si no imposible, de resolver por métodos analíticos. Esto lo podremos ir comprobando mediante el tratamiento en el plano fásico del sistema dinámico en el cual deviene la ecuación $F = -k.x$ del oscilador armónico. Ecuación que puede escribirse $x'' = (-k/m)x$ y mediante la sustitución $x' = y$ plantear el sistema dinámico:

$$\begin{aligned}x' &= y \\ y' &= -(k/m)x\end{aligned}$$

Como los primeros miembros son derivadas respecto al tiempo de x y de y , tendremos $dy/dx = -(k/m)x/y$ igualdad mediante la cual podemos calcular en cada punto $P(x', y')$ la pendiente de la curva solución del sistema dinámico, los cuales darán la pauta para el trazado de la trayectoria fásica del oscilador armónico en el sistema de coordenadas x' , y cuyos puntos $P(x, y')$ representarán los estados dinámicos del oscilador según transcurre el tiempo, o sea, que la trayectoria fásica nos ofrece un *retrato fásico* de la dinámica del oscilador. En la mayoría de los casos este método gráfico es el único que se puede utilizar por lo ya dicho, aunque en el ejemplo que mostramos, por su sencillez excepcional, la solución analítica la podemos obtener a partir de la expresión de la pendiente antes expresada, llegándose a la siguiente igualdad:

$$y^2/2 + m\omega^2 x^2/2 = E \quad k = m\omega^2$$

donde E es la constante de integración, la cual reconocemos como energía mecánica total pues vemos en el primer miembro la suma de las energías cinética y potencial.

Podemos transformar la ecuación cartesiana anterior en una expresión en función de las coordenadas fásicas:

$$p^2/(2E/\omega^2) + q^2/2E = 1 \quad (5)$$

expresión de la trayectoria fásica del oscilador armónico que como advertimos es una elipse mostrando que los estados dinámicos del oscilador son representados por los puntos fásicos $P(x, y)$. En este caso la trayectoria fásica es una órbita cerrada en la que al ir recorriendo sus puntos, los estados fásicos $P(x, y)$ se van repitiendo periódicamente mostrando el carácter oscilatorio del movimiento que estudiamos.

Las trayectorias fásicas de los sistemas no oscilatorios son abiertas. Si las trayectorias son atraídas hacia un punto o hacia una órbita cerrada a éstos se les llama atractores. Contrario comportamiento tienen los puntos y órbitas cerradas repulsores. Tanto a los puntos atractores como a los repulsores se les llama puntos fijos o de equilibrio del sistema y en ellos tanto x' como y' son iguales a cero. Si la órbita cerrada no contiene atractores, constituye lo que se denomina un *ciclo límite*.

En los sistemas como el oscilador armónico, en los cuales $E = \text{constante}$, esto es, en los sistemas conservativos, el área del espacio fásico que encierra una trayectoria fásica como la expresada por (5), tiene un área constante. Esto puede verse al calcular el área encerrada por la elipse (5) mediante $A = \pi ab$ (a y b semiejes de la elipse) y obtenerse $A = 2\pi E/\omega$ donde en el segundo miembro sólo hay constantes.

Si en el sistema E no es constante (sistema disipativo), el área se contrae. Las ecuaciones de Hamilton se cumplen en los sistemas conservativos por lo que a éstos se les llama hamiltonianos. En las regiones del espacio fásico de los sistemas conservativos no existen atractores pues éstos contraerían las áreas y tal cosa no puede ocurrir pues como vimos, en dichos sistemas, el área es constante.

Tanto el concepto de espacio de fases como las ecuaciones canónicas de Hamilton, tienen una importante aplicación en el proceso de identificación de una función como integral o constante de movimiento como lo es la energía mecánica total.

Veamos sea la función $f = f(p, q, t)$, para probar si es integral de movimiento se tendrá que cumplir que:

$$df/dt = 0$$

para lo cual:

$$df/dt = \partial f / \partial t + (\partial f / \partial p) p' + (\partial f / \partial q) q'$$

por las ecuaciones de Hamilton:

$$df/dt = \partial f / \partial t + \{(\partial f / \partial q) \partial H / \partial p - (\partial f / \partial p) \partial H / \partial q\}$$

donde lo cogido entre corchetes es el llamado Corchete de Poisson. Si f no depende explícitamente del tiempo, esto es, $\partial f / \partial t = 0$, entonces si f es integral de movimiento o lo que es lo mismo si $df/dt = 0$, el Corchete de Poisson tiene que ser igual a cero. Lo dicho puede comprobarse tomando como f a la energía E despejada de (5).

Hemos presentado pues, de la forma mas elemental posible lo fundamental de la Dinámica Analítica o Hamiltoniana Lagrangiana utilizando ejemplos muy sencillos que el lector ya conoce tratados por los métodos newtonianos lo cual le facilita la mejor comprensión de los métodos de Hamilton-Jacobi y Lagrange.

Bibliografía Recomendada

Goldstein, H. Mecánica Clásica. 2008.

Landau, L., E. Lifshitz. Curso Abreviado de Física Teórica. 1974.

Sánchez China, C. Sobre la formulación lagrangiana de la Mecánica aplicando el Principio de los Trabajos Virtuales. www.casanchi.com.

Terlietski, Y. P. Física Estadística. 1971.

Joaquín GONZÁLEZ ÁLVAREZ
j.gonzalez.a@hotmail.com