

OPERADORES DE CREACIÓN Y ANIQUILACIÓN

Alejandro R. Álvarez Silva

El estado de un sistema cuántico se describe por medio de la función de onda $\psi(\mathbf{r}, t)$, y las variables dinámicas se representan mediante operadores hermitianos (operador lineal que coincide con su propio operador adjunto, y en el que sus autovalores son siempre reales) cuyas autofunciones forman un sistema ortonormal completo. La función de onda contiene toda la información físicamente de interés acerca del sistema, puesto que a partir de ella puede calcularse el valor esperado de cualquier variable dinámica.

En realidad todas las magnitudes físicas, llamadas observables, se representan por operadores autoadjuntos y sus valores medios $\mathbf{A}(\mathbf{r}, \mathbf{p})$ vienen dados por

$$\langle \mathbf{A}(\mathbf{r}, \mathbf{p}) \rangle = \int d^3r \psi^* \mathbf{A} \psi = \int d^3k \phi^* \mathbf{A} \phi$$

donde \mathbf{A} es un operador cuya acción sobre ψ o ϕ se determina en cada caso según se elija la representación de coordenadas o de momentos.

Se define el producto escalar de dos vectores de onda ψ_1 y ψ_2 (omitiendo la dependencia en t) por la expresión

$$\langle \psi_2 | \psi_1 \rangle = \int d^3r \psi_2^*(\mathbf{r}) \psi_1(\mathbf{r}) = \int d^3k \phi_2^*(\mathbf{k}) \phi_1(\mathbf{k})$$

La condición de normalización consiste en exigir que el vector de onda tenga norma unidad $\langle \psi | \psi \rangle = 1$.

El significado físico del producto escalar es que el módulo al cuadrado da la probabilidad de que la partícula con el vector de onda ψ_1 esté a la vez en el estado con el vector de onda ψ_2 . Si los estados son independientes $\langle \psi_2 | \psi_1 \rangle = 0$ que corresponde geoméricamente a vectores ortogonales.

El valor medio de una magnitud física $\mathbf{A}(\mathbf{r}, \mathbf{p})$ se representa como el producto escalar $\langle \mathbf{A} \rangle = \langle \psi | \mathbf{A} | \psi \rangle$.

Dos operadores no conmutan si el conmutador

$$[A_1, A_2] = A_1 A_2 - A_2 A_1, \quad \text{es diferente de cero.}$$

A^\dagger se llama operador conjugado de A , si para todo ψ_1 y ψ_2 de la clase escogida se cumple

$$\langle \psi_2 | A \psi_1 \rangle = \langle A^\dagger \psi_2 | \psi_1 \rangle$$

Sus valores medios son reales.

*Estudiemos ahora el oscilador armónico cuántico desde el punto de vista del álgebra de operadores. Para ello empezamos escribiendo el Hamiltoniano como

$$\hat{H} = P_x^2 / 2m + \frac{1}{2} m \omega^2 x^2 \quad (\text{los valores en cursiva indican valores medios})$$

donde P_x^2 es la componente sobre el eje x del operador momento de la partícula.

Definimos las magnitudes

$$X = (m\omega/\hbar)^{1/2} x, \quad P = P_x / (m\hbar\omega)^{1/2}$$

que permite expresar el Hamiltoniano como la suma de las formas cuadráticas

$$\hat{H} = \frac{1}{2} \hbar \omega (P^2 + X^2)$$

Lo que sugiere definir un operador y su adjunto tales que su producto sean proporcionales al Hamiltoniano. Así, definimos el operador de bajada a y el de subida a^\dagger

$$a = 1/\sqrt{2} (X + iP), \quad a^\dagger = 1/\sqrt{2} (X - iP)$$

Se puede fácilmente comprobar que la relación de conmutación posición-momento $[X, P] = i\hbar$ se transforma en

$[a, a^\dagger] = a^\dagger a - a a^\dagger = 1$ y que el Hamiltoniano se puede reescribir como

$$\hat{H} = \frac{1}{2} \hbar \omega (a a^\dagger + a^\dagger a) = \hbar \omega (a^\dagger a + \frac{1}{2})$$

El término $\frac{1}{2} \hbar \omega$ es consecuencia de que X y P no conmutan (principio de indeterminación).

Al operador de bajada (a) se llama también operador de aniquilación y el de subida (a^\dagger) operador de creación.

Estos operadores, pues, satisfacen las reglas de conmutación

$$[a, a^\dagger] = 1, \quad [a, a] = [a^\dagger, a^\dagger] = 0$$

Se define el operador de número N en la forma

$$N = a^\dagger a \quad \text{que resulta ser hermiteano.}$$

En términos de este operador, el Hamiltoniano puede ponerse en la forma simple

$$\hat{H} = \hbar \omega (N + \frac{1}{2})$$

Para el operador de creación se obtiene

$$a^\dagger |n\rangle = (n+1)^{1/2} |n+1\rangle$$

Y para el de aniquilación

$$a |n\rangle = (n)^{1/2} |n-1\rangle$$

La correspondencia entre la mecánica clásica y la cuántica de los operadores correspondientes a la posición y el momento es:

$$x = x ; \quad y = y ; \quad z = z$$

$$p_x = -i \hbar \delta / \delta x ; \quad p_y = -i \hbar \delta / \delta y ; \quad p_z = -i \hbar \delta / \delta z$$

Así, como ejemplo, la energía cinética que se expresa como

$$E_{\text{cin}} = \frac{1}{2} m (v_x^2 + v_y^2 + v_z^2) = \frac{1}{2} m (p_x^2 + p_y^2 + p_z^2)$$

al pasar a su versión cuántica queda en la forma

$$\frac{1}{2} m (p_x^2 + p_y^2 + p_z^2) = -\hbar^2 / 2m \nabla^2$$

*Para campos en el vacío, las ecuaciones de Maxwell clásicas de los campos electromagnéticos se expresan por las ecuaciones de onda

$$\nabla^2 \mathbf{E} - 1/c^2 \delta^2 \mathbf{E} / \delta t^2 = 0 \quad \nabla^2 \mathbf{H} - 1/c^2 \delta^2 \mathbf{H} / \delta t^2 = 0$$

Siendo \mathbf{E} el campo eléctrico y \mathbf{H} el campo magnético, así como c la velocidad de la luz.

Si suponemos que los campos están dentro de una cavidad de volumen L^3 y que el campo eléctrico está polarizado en la dirección x y el magnético en la dirección y , para un solo modo normal de amplitud q , podemos escribir

$$E_x(z, t) = (2w^2 m / \epsilon_0 L^3)^{1/2} q(t) \sin(kz) ; \quad H_y(z, t) = (2w^2 m / \epsilon_0 L^3)^{1/2} (q^*(t) \epsilon_0 / k) \cos(kz)$$

donde ϵ_0 es la permitividad eléctrica en el vacío. El número de onda k y la frecuencia w cumplen $k = w/c$. La energía correspondiente viene dada por la función de Hamilton H

$$H = \frac{1}{2} \int_{L^3} (\epsilon_0 E_x^2 + \mu_0 H_y^2) dv = \frac{1}{2} (mw^2 q^2 + p^2/m)$$

siendo dv un elemento diferencial de volumen, $p = m \dot{q}$ el momento canónico de q y μ_0 la permeabilidad magnética. La expresión de la derecha es la energía del oscilador armónico clásico.

En mecánica clásica el producto qp es igual al producto pq , y se dice, pues, que q y p conmutan.

En el tratamiento cuántico se usan otros objetos matemáticos para representar la amplitud y su momento canónico. Se tiene la correspondencia $q \rightarrow Q$, $p \rightarrow P$. Pero estos nuevos símbolos son tales que sus producto no conmuta

$$[Q, P] = QP - PQ = i\hbar ; \quad [Q, Q] = [P, P] = 0$$

A Q y P se les llama operadores.

Como vimos en el oscilador, se definen también el par de operadores a y a^\dagger en la forma

$$a = 1/(2m\hbar w)^{1/2} (mwQ + iP) , \quad a^\dagger = 1/(2m\hbar w)^{1/2} (mwQ - iP)$$

Operadores que satisfacen las reglas de conmutación

$$[a, a^\dagger] = 1 \quad [a, a] = [a^\dagger, a^\dagger] = 0$$

Las expresiones anteriores de E_x y H_y en términos de los nuevos operadores serán

$$E_x(z, t) = \varepsilon (a + a^\dagger) \sin(kz) \quad H_y(z, t) = -i \varepsilon_0 c \varepsilon (a - a^\dagger) \cos(kz)$$

ε se expresa en unidades de campo eléctrico.

Así que E_x y H_y son también operadores que representan la polarización de los campos eléctrico y magnético, así como es un operador la energía expresada por el Hamiltoniano

$H = \hbar \omega (a^\dagger a + 1/2)$, que sería el Hamiltoniano de un oscilador cuántico que tiene, entonces, valores discretos.

Investiguemos ahora los estados cuánticos correspondientes a cada valor E_n de la energía, al que asociamos con un vector $|n\rangle$, pidiendo que éste sea la solución de la ecuación de eigenvalores $\mathbf{H} |n\rangle = E_n |n\rangle$.

La primera solución $|0\rangle$ corresponde al estado de energía más baja (estado base) $E_0 = 1/2 \hbar \omega$, que se obtiene fácilmente al notar que $|0\rangle$ también satisface la ecuación $a|0\rangle = 0$. (El operador a ha "aniquilado" al estado base).

Se tiene también que

$$a^\dagger |0\rangle = |1\rangle \quad \text{y en general}$$

$$a |n\rangle = (n)^{1/2} |n-1\rangle \quad a^\dagger |n\rangle = (n+1)^{1/2} |n+1\rangle$$

Así que por iteración de a^\dagger n veces sobre el estado base, podemos expresar el vector arbitrario $|n\rangle$ en la forma

$$|n\rangle = 1/(n!)^{1/2} (a^\dagger)^n |0\rangle \quad n! = n(n-1)(n-2)\dots 2 * 1$$

El esquema señalado para $|n\rangle$ indica que hay n fotones con energía E_n , y la acción de a (a^\dagger) sobre el estado $|n\rangle$ representa la pérdida (ganancia) de un fotón por parte del campo electromagnético. (Ésta es la razón por la que a y a^\dagger se conocen, respectivamente, como operadores de aniquilación y creación).

$|0\rangle$ significa ausencia de fotones con energía E_0 , que correspondería al vacío.

*La ecuación básica de Schrödinger de la mecánica cuántica

$$[-\hbar^2 \nabla^2 / 2m + V(r)] \psi(r, t) = i \hbar \delta \psi(r, t) / \delta t$$

adolece de dos problemas fundamentales

- Primero no es relativista, así que hay que modificarla por la ecuación relativista de la energía y el momento, resultando la ecuación de Klein-Gordon o la ecuación de Dirac.
- Y segundo, se complica extraordinariamente al intentar ampliarla a una gran cantidad de partículas. Además, las partículas mecánico-cuánticas de la misma especie son indistinguibles en el sentido que la función de onda del conjunto entero debe ser simétrica (bosones) o antisimétrica (fermiones), cuando las coordenadas de sus partículas cuánticas se intercambian.

La técnica empleada para tratar sistemas cuánticos de muchas partículas idénticas (bosones o fermiones) se llama **formalismo de la segunda cuantificación**, desarrollada a partir de 1927 por Paul A.M. Dirac para los bosones y extendido a los fermiones por Eugene Wigner y Pascual Jordan en 1928. Tal formalismo permite

tomar en cuenta automáticamente en los cálculos los aspectos combinatorios que derivan de la estadística apropiada al tipo de partículas del sistema. Además facilita, como hemos dicho, extender la mecánica cuántica no relativista a sistemas en los cuales el número de partículas no es una constante del movimiento, extensión que por otra parte es necesaria para describir los fenómenos que se presentan en el dominio relativístico.

Supongamos que conocemos un sistema completo de autofunciones ortonormales de una partícula

$$\psi_1(\xi_1), \psi_2(\xi_2), \dots$$

que pudieran corresponder, por ejemplo, a los estados estacionarios de la partícula en un campo de fuerzas $v(\xi)$. La variable ξ indica el conjunto de las variables espaciales r y de spin σ de una partícula, y los subíndices 1, 2, ... representan los números cuánticos que identifican la autofunción.

Consideremos un sistema de n bosones que no interactúan y que están sometidos a $v(\xi)$. Si el sistema está en estado estacionario, cada una de las partículas que lo componen se encuentran en uno de los estados $\psi_1(\xi), \psi_2(\xi), \dots$. Sea n_i el número de partículas que están en el estado ψ_i ; n_i se denomina número de ocupación o población de dicho estado y puede ser nulo o tomar cualquier valor entero positivo $\leq n$. La enunciación de todos los números de ocupación de los estados ψ_i determina el estado del sistema, que queda especificado por

$$n_1, n_2, \dots \text{ enteros no negativos tales que } \sum n_i = n.$$

Se usarán entonces para designar la función de onda del sistema, y escribiremos

$$\Psi_n = \Psi_{n; n_1, n_2, \dots}$$

Los números de ocupación jugarán el rol de variables independientes, en vez de las variables habituales ξ_1, ξ_2, \dots de las partículas.

A continuación se introducen los operadores fundamentales a_i de la segunda cuantificación (como anteriormente, por sencillez, las letras en cursiva las asimilamos a valores medios), que operan directamente sobre las variables n_1, n_2, \dots . Se definen especificando su efecto sobre las funciones básicas $\Psi_{n; n_1, n_2, \dots}$ del espacio de números de ocupación \square del siguiente modo

$$a_i \Psi_{n; n_1, n_2, \dots} = (n_i)^{1/2} \Psi_{n-1; n_1, n_2, \dots, n_i-1, \dots}$$

Es decir: el efecto de a_i es reducir en una unidad el número de ocupación del estado i y multiplicar por $(n_i)^{1/2}$. Por tal motivo a_i se denomina operador de aniquilación (de una partícula en el estado i). a_i reduce en una unidad el número total de partículas, de modo que transforma funciones del subespacio \square_n en función del subespacio \square_{n-1} .

El operador a_i^\dagger adjunto de a_i aumenta en una unidad la población del estado i y multiplica la nueva función por $(n_i+1)^{1/2}$, según

$$a_i^\dagger \Psi_{n; n_1, n_2, \dots, n_i, \dots} = (n_i+1)^{1/2} \Psi_{n+1; n_1, n_2, \dots, n_i+1, \dots}$$

Por lo tanto a_i^\dagger transforma funciones de \square_n en funciones de \square_{n+1} . Por este motivo a_i^\dagger se denomina operador de creación (de una partícula en el estado i).

Operando se obtiene

$$a_i^\dagger a_i \Psi_{n; n_1, n_2, \dots, n_i, \dots} = n_i \Psi_{n; n_1, n_2, \dots, n_i, \dots}$$

Así que n_i está representado por una matriz diagonal cuyos elementos son n_i . Entonces n_i sería el operador número de partículas en el estado i .

El operador número total de partículas sería

$$n = \sum_i n_i = \sum_i a_i^\dagger a_i$$

Y operando se obtiene la relación de conmutación entre a_i y a_i^\dagger

$$[a_i, a_i^\dagger] = a_i a_i^\dagger - a_i^\dagger a_i = 1$$

Los operadores de creación y aniquilación que operan sobre números de ocupación diferentes es obvio que conmutan, de modo que puede escribirse para todo i, j

$$[a_i, a_j^\dagger] = \delta_{ij} \quad [a_i, a_j] = [a_i^\dagger, a_j^\dagger] = 0$$

Los operadores a_i y a_j^\dagger juegan el mismo papel que los operadores a y a^\dagger definidos anteriormente para el oscilador armónico.

Dichos operadores de creación y aniquilación permiten expresar cualquier variable dinámica del sistema de muchas partículas por medio de un operador que actúa sobre los números de ocupación.

Si $f_a^{(1)}$ es el operador que representa una variable dinámica f de una partícula (por ejemplo, el impulso p) para la a -ésima partícula, esto es, el operador que actúa solamente sobre las variables ξ_a ($a = 1, 2, \dots, n$), el correspondiente operador simétrico respecto a todas las partículas del sistema (digamos, el impulso total P , por ejemplo) se define como

$$F^{(1)} = \sum_a f_a^{(1)}$$

O sea, el efecto $F^{(1)}$ sobre cualquier estado del sistema de n partículas puede calcularse si se conoce su efecto sobre las funciones básicas $\psi_{n; n_1, n_2, \dots}$.

Al final, puede demostrarse que si la probabilidad que se produzca una transición es proporcional al número de partículas que ocupan el estado de partida, necesariamente debe ser también proporcional al número de partículas que quedan en el estado de llegada (condición de balance detallado).

La expresión anterior puede ponerse en función de los operadores de creación y aniquilación a_i^\dagger y a_k , en la forma

$$F^{(1)} = \sum_{i,k} f_{i,k}^{(1)} a_i^\dagger a_k$$

Así que hemos podido pasar del operador ordinario anterior que actúa sobre funciones coordenadas, a un operador que actúa sobre las nuevas variables del espacio de números de ocupación \square .

La última expresión se parece a la

$$f = \sum_{i,k} f_k^i a_i^\dagger a_k$$

del valor medio de una variable dinámica f en un estado dado, escrito en términos de los coeficientes a_i del desarrollo de la función de onda como superposición de estados estacionarios. De esto proviene el nombre "segunda cuantificación".

El resultado se generaliza para operadores $F^{(2)}$ que representan una magnitud que depende de un par de partículas (por ejemplo, la energía potencial de interacción entre dos partículas cargadas). También para operadores $F^{(n)}$ que involucran cualquier número n de partículas.

De igual forma, el Hamiltoniano H del sistema de n partículas en interacción puede expresarse en función de los operadores a_i y a_i^\dagger .

Primero, en general H puede escribirse en la forma (en la aproximación no relativista)

$$H = \sum_a h_a^{(1)} + \sum_{a>b} v_{ab}^{(2)} + \sum_{a>b>c} v_{abc}^{(3)} + \dots$$

$h_a^{(1)}$ es la parte de H que depende de las coordenadas de la a -ésima partícula y tiene la forma

$$h_a^{(1)} = -\hbar^2 \nabla_a^2 / 2m + v^{(1)}(\mathbf{r}_a)$$

donde $v^{(1)}(\mathbf{r}_a)$ es la energía potencial de la partícula en el campo externo. Los otros términos corresponden a las interacciones entre las partículas, separando por comodidad los términos que dependen las coordenadas de dos, tres,...etc. partículas.

Y pasando a los operadores anteriores de creación y aniquilación resulta, tras un pequeño cálculo

$$H = \sum_{i,k} h^{(1)}_{ik} a_i^\dagger a_k + 1/2 \sum_{i,k,l,m} v^{(2)}_{iklm} a_i^\dagger a_k^\dagger a_l a_m + \dots$$

que es un operador que actúa sobre las funciones de los números de ocupación.

En el caso de partículas que no interactúan, sólo subsiste el primer término

$$H = \sum_{i,k} h^{(1)}_{ik} a_i^\dagger a_k$$

Si las $\psi_1(\xi), \psi_2(\xi), \dots$ son las autofunciones del Hamiltoniano de una partícula, de modo que $h^{(1)}\psi_i = e_i \psi_i$, la matriz $H^{i,k}$ es diagonal y se tiene

$$H = \sum_i e_i a_i^\dagger a_i = \sum_i e_i n_i$$

De donde reemplazando los operadores n_i por sus autovalores n_i , obtenemos los niveles de energía del sistema como

$$E_{n_1, n_2, \dots} = \sum_i e_i n_i \quad \text{como habría que esperar.}$$

*La segunda cuantificación se puede aplicar a una base continua introduciendo los operadores de campo, que se definen por

$$\psi(\xi) = \sum_i \psi_i(\xi) a_i \quad \psi^\dagger(\xi) = \sum_i \psi_i^*(\xi) a_i^\dagger$$

Ahora, a_i y a_i^\dagger se expresan en términos de los operadores de campo anteriores como

$$a_i = \int \psi_i^*(\xi) \psi(\xi) d\xi \quad a_i^\dagger = \int \psi_i(\xi) \psi^\dagger(\xi) d\xi$$

Claramente, en virtud de las propiedades de a_i y a_i^\dagger , los operadores $\psi(\xi)$ y $\psi^\dagger(\xi)$ disminuyen y aumentan en una unidad, respectivamente, el número total de partículas del sistema.

Operando, se encuentra la expresión del operador $F^{(1)}$ para el espectro continuo de un observable de un campo de bosones

$$F^{(1)} = \sum_{i,k} \int \psi_1^*(\xi) f^{(1)} \psi_k(\xi) d\xi a_i^\dagger a_k = \sum_{i,k} f^{(1)}_k a_i^\dagger a_k$$

Que coincide con la anteriormente hallada del espectro discreto.

Y de igual forma se opera con $F^{(2)}$.

Para H se obtiene el valor medio de la energía del sistema cuando las n partículas están en el estado $\psi(\xi)$.

Resumiendo, si el sistema está constituido por varias clases de bosones (fotones, etc.), hay que introducir en el formalismo de segunda cuantificación los operadores de aniquilación y creación a, a^\dagger , o bien los de campo ψ, ψ^\dagger para cada clase de partículas.

Todas estas ideas básicas del método de segunda cuantificación se mantienen para los sistemas constituidos por fermiones (electrones, etc.) idénticos, pero aquí la función de onda $\psi_{n; n_1, n_2, \dots}$ es antisimétrica, por lo que es importantísimo establecer una convención para determinar su signo.

En este caso, los operadores de aniquilación y creación de fermiones, se definirán por

$$a_i \psi_{n; n_1, n_2, \dots, n_i, \dots} = (-1)^{\sum_{j=1}^{i-1} n_j} (n_i)^{1/2} \psi_{n-1; n_1, n_2, \dots, n_i-1, \dots}$$

$$a_i^\dagger \psi_{n; n_1, n_2, \dots, n_i, \dots} = (-1)^{\sum_{j=1}^{i-1} n_j} (n_i+1)^{1/2} \psi_{n+1; n_1, n_2, \dots, n_i+1, \dots}$$

Si n_i es el operador número de partículas en el estado i

$$n = \sum_i n_i = \sum_i a_i^\dagger a_i$$

es el operador número total de partículas.

Se obtiene que

$$a_k a_i^\dagger + a_i^\dagger a_k = 0, \quad i \neq k$$

$$a_i a_i^\dagger + a_i^\dagger a_i = 1$$

$$a_k a_i + a_i a_k = 0$$

$$a_k^\dagger a_i^\dagger + a_i^\dagger a_k^\dagger = 0$$

Que constituyen las relaciones de anticonmutación para los fermiones.

Si no hay interacción entre las partículas, las ecuaciones de movimiento de fermiones y bosones se reduce a

$$i\hbar d\psi(\xi)/dt = h^{(1)}(\xi) \psi(\xi)$$

que es formalmente idéntica a la ecuación de Schrödinger para una partícula

$$i\hbar d\psi(\xi)/dt = h^{(1)} \psi(\xi) \quad (*)$$

Pero hay que recalcar, sin embargo, que $\psi(\xi)$ es un operador de campo y no una función de onda ordinaria, así que la primera ecuación puede considerarse como la "versión cuantificada" de la ecuación de Schrödinger (si interpretamos esta última como la ecuación de un campo clásico $\psi(\xi)$, como por ejemplo la onda asociada a una partícula como un electrón).

Para finalizar decir que los operadores de creación y aniquilación en la representación de interacción (para $t \neq 0$) se escriben en la forma

$$a_{k \rightarrow}(t) = e^{iH^* t} a_{k \rightarrow} e^{-iH^* t} \quad a_{k \rightarrow}^\dagger(t) = e^{iH^* t} a_{k \rightarrow}^\dagger e^{-iH^* t}$$

Hemos sustituido H^* por H_0^S , y $a_{k \rightarrow}$ y $a_{k \rightarrow}^\dagger$ son los operadores correspondientes en la representación de Schrödinger o en la representación de interacción a $t=0$.

Una expresión más compacta de los mismos es

$$a_{k \rightarrow}(t) = a_{k \rightarrow}(0) e^{-iWkt} \quad a_{k \rightarrow}^\dagger(t) = a_{k \rightarrow}^\dagger(0) e^{iWkt}$$

donde la última resulta la adjunta de la anterior.

A partir de aquí nos introducimos en la Teoría Cuántica de Campos, al tomar como punto de partida la ecuación (*), interpretando que dicha ecuación rige la dinámica de los operadores de campo $\psi(\xi)$ y $\psi^\dagger(\xi)$, operadores que cumplen las reglas de conmutación fundamentales si el campo describe bosones o bien las relaciones de anticonmutación si se trata de fermiones.

REFERENCIAS

Mecánica Cuántica...Alberto Galindo, Pedro Pascual. EUDEMA UNIVERSIDAD.1989

La "Susy" de los físicos...CIENCIAS. Revista de difusión.1987

Teoría cuántica Relativista..Beresteiskii, Lifshitz y Pitaenskii. Editorial Reverte. 1975

Estados coherentes y gatos de Schrödinger. Sara Cruz y Cruz, Oscar Rosas Ortiz. CINVESTAV.Enero-Marzo 2008

Física Cuántica.. Joaquín Sánchez Guillén, Mijail A.Braun. Alianza Universidad.1993

WIKIPEDIA (Diagramas de Feynman, axiomas de Wighman, teoría cuántica de campos, operador mecánica cuántica, operador hermitiano, operador escalera, grupo unitario, estado de Fock, cálculo tensorial, producto tensorial, notación corchete, formulación matemática de la mecánica cuántica, etc.)

<http://www.lfp.uba.ar/Julio-Gratton/cuantica/14.Segunda/020c.pdf>

<http://www.cica.es/aliens/dfamnus/cursos/tcc//tema6.pdf>

SIMBIOTICA ´S BLOG (<http://simbiotica.wordpress.com/>)

Alejandro R. Álvarez Silva.
alejandro_alv@yahoo.es