SOBRE LA CONSTANTE G DE GRAVITACIÓN NEWTONIANA

En 1798 Henry Cavendish logró determinar por primera vez la densidad de la Tierra, al obtener uno de los datos de la fórmula de su cálculo mediante el experimento conocido como *de la balanza de torsión, o experimento de Cavendish.* 75 años después, en 1873, fue calculada la constante G a partir del dato obtenido por el experimento de Cavendish, aunque bien pudiera haberse obtenido antes y sin necesidad de conocer la densidad de la Tierra.

DENSIDAD DE LA TIERRA:

Podemos comparar la fuerza de atracción sobre una masa m ejercida por un cuerpo masivo de masa M_e, y la fuerza de atracción ejercida sobre m por la masa de la Tierra M_t. De dicha comparación, y conociendo el valor del radio R de la tierra, podemos determinar la densidad.

Fuerza ejercida sobre m por la esfera de masa M_e, a una distancia de r_e:

$$f_e = G.\frac{M_e.m}{r_e^2}$$

Fuerza ejercida sobre m por la masa M_t de la tierra, de radio R:

$$f_g = G\frac{M_t.m}{R^2}$$

Comparando ambas expresiones:

$$\frac{f_g}{f_e} = \frac{M_t}{M_e}.\left(\frac{r_e}{R}\right)^2$$

Despejamos la masa de la Tierra:

$$M_t = M_e\left(\frac{R}{r_e}\right)^2\left(\frac{f_g}{f_e}\right)$$

En función de la densidad de la Tierra:

$$\frac{4}{3}\pi R^3.\delta = M_e\left(\frac{R}{r_e}\right)^2\left(\frac{f_g}{f_e}\right)$$

Finalmente despejamos la densidad:

$$\delta = \frac{3.M_e}{4\pi R.r_e^2}\left(\frac{f_g}{f_e}\right)$$

sustituyendo $f_g = mg$:

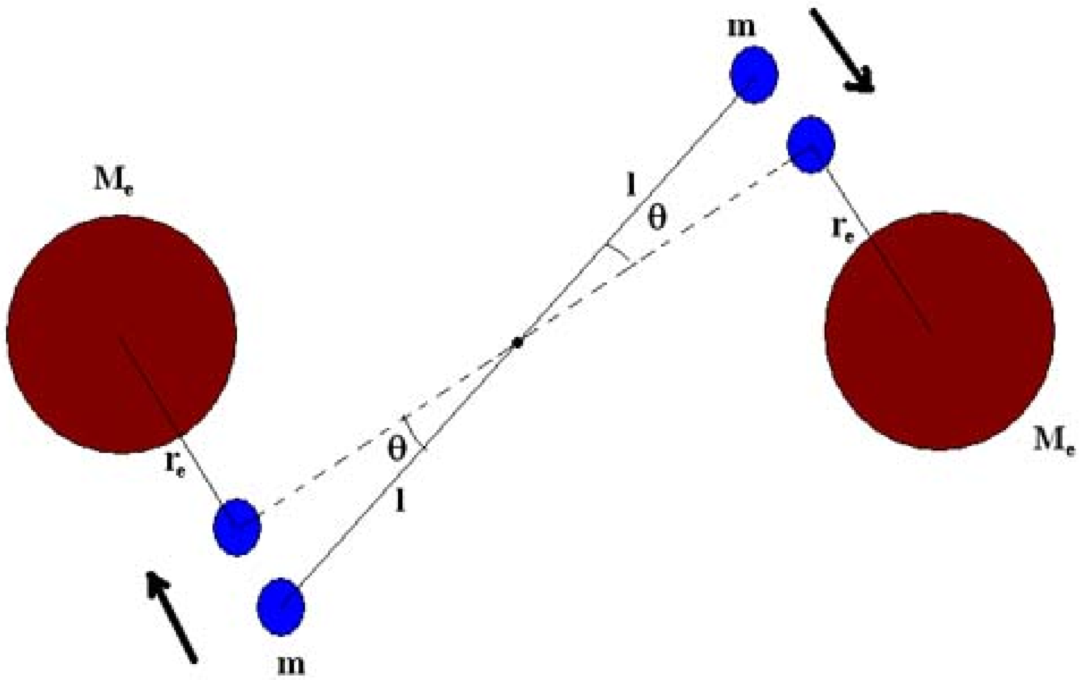
$$\delta = \frac{3.M_e}{4\pi R.r_e^2}\left(\frac{mg}{f_e}\right)$$

Esta fórmula nos da la densidad de la Tierra. En cuanto se conozca la fuerza f_e que ejerce sobre m la esfera de masa M_e situada a una distancia r_e. Y ello debe calcularse experimentalmente.

Para poder determinar este dato Henry Cavendish (1731-1810) realizó un conocido experimento denominado *Experimento de la balanza de torsión (o "Experimento de Cavendish").*

Puesto que se trataba de medir solamente la fuerza de atracción ejercida por una esfera masiva sobre la esfera de masa m sin que interfiera la atracción gravitatoria de nuestro planeta, optó por idear un procedimiento que anulase esta atracción y consistió en fijar verticalmente la pequeña masa *m* de forma que no fuera atraída por la Tierra.

Así, colgó una muy fina varilla de longitud 2L por su centro, colocando en sus extremos sendas masas de valor m. A continuación acercó a cada una de estas masas una esfera de masa M_e. La atracción de las esferas provoca una torsión del hilo de sujeción de la varilla variando su dirección un ángulo θ, que se puede medir mediante un espejo que refleje una señal en una pared enfrentada.



El momento de torsión del hilo que soporta la varilla con las esferas es $M_o = k.\theta$, y es equilibrado por el momento de la fuerza f_e de atracción $M_e = f_e.l$. Al igualar, se tiene:

$$f_e.l = k.\theta \rightarrow f_e = k.\frac{\theta}{l}$$

En definitiva:

$$\delta = \frac{3.M_e}{4\pi R.r_e^2}\left(\frac{mg.l}{k\theta}\right)$$

Se obtiene así, para $g=9,8\ m.s^{-2}$, $R=6371\ kms$, el valor hoy aceptado para la densidad de nuestro planeta con una gran aproximación:

$$\delta = 5{,}5152\ g.cm^{-3}$$

CALCULO DE LA CONSTANTE G USANDO LA DENSIDAD DE LA TIERRA:

Se tiene que la fuerza gravitacional actuante sobre una pequeña masa sobre la superficie de la Tierra es:

$$m.g = G\frac{M.m}{R^2}$$

y de aquí podemos despejar G:

$$G = \frac{g.R^2}{M} = \frac{g.R^2}{\frac{4}{3}\pi R^3.\delta} = \frac{3g}{4\pi R.\delta}$$

Tomando los valores,

$$g = 9{,}8\ m.s^{-2},\ \ R = 6371\ Km = 6371.10^3\ m,\ \ \delta = 5{,}5153\ g.cm^{-3} = 5{,}5153.10^3\ Kg.m^{-3}$$

resulta:

$$G = \frac{3g}{4\pi R.\delta} = \frac{3.9{,}8}{4\pi.6371.10^3.5{,}5153.10^3} = \frac{29{,}4}{441556{,}8323}.10^{-6} = 6{,}6582.10^{-11}\ Nw.m^2 kg^{-2}$$

El valor hoy aceptado es $G = 6{,}6720.10^{-11}\ Nw.m^2.kg^{-2}$

CALCULO DE LA CONSTANTE G USANDO DATOS ORBITALES DE OBJETOS QUE ORBITAN ALREDEDOR DE OBJETOS MÁS MASIVOS:

Aunque históricamente la constante G de la gravitación newtoniana fue determinada desde la densidad de la Tierra, obtenida mediante el experimento de Cavendish, es muy sencillo obtener el valor de G mediante el estudio de las orbitas de los cuerpos de nuestro sistema solar cuando suponemos a estas órbitas aproximadamente circulares.

Bastaría considerar equilibrada la fuerza centrípeta del objeto que se desplaza alrededor del cuerpo masivo con la fuerza de atracción gravitacional de éste. O sea, igualando ambas expresiones:

$$m.\frac{v^2}{R} = G\frac{M.m}{R^2}$$

Si es T el tiempo que tarda el objeto en dar una vuelta completa, podemos considerar la velocidad media

$$v = \frac{2\pi R}{T}$$

Por tanto:

$$\frac{m.4\pi^2 R^2}{T^2 R} = G\frac{Mm}{R^2} \rightarrow G = \frac{4\pi^2 R^3}{T^2 M}$$

Veamos algunos ejemplos a continuación.

Ejemplo de Cálculo. Desde los datos orbitales de la Luna en su movimiento alrededor de la Tierra:

$T = 27 dias\ 7 horas\ 43{,}7 \min = 2360622\ segundos$

$R = 384400\ kms = 384{,}4.10^6\ metros$ (distancia media)

$M = 5{,}9736.10^{24}\ kgs$

$$G = \frac{4\pi^2 R^3}{T^2 M} = \frac{4.(3{,}14159265)^2.(384{,}4.10^6)^3}{(2360622)^2.5{,}9736.10^{24}} = \frac{2242383415.10^{18}}{33.28810241.10^{36}} = 67363909{,}05.10^{-18} =$$

$$= 6{,}7363.10^{-11}\ Nw.m^2.kg^{-2}$$

Ejemplo de Cálculo. Desde los datos orbitales de la Tierra en su movimiento alrededor del Sol:

Ahora hemos de utilizar el tiempo periodo de traslación de la Tierra alrededor del Sol, el radio medio de la órbita, y la masa del Sol. Usando datos aproximados, tenemos:

$T = 365\ dias = 31536000\ segundos$

$R = 150000000\ kms = 15.10^{10} metros$ (distancia media al Sol)

$M = 1{,}98.10^{30}\ kgs$

$$G = \frac{4\pi^2 R^3}{T^2 M} = \frac{4.(3{,}14159265)^2.(15.10^{10})^3}{(31536000)^2.1{,}98.10^{30}} = \frac{133239.6591.10^{30}}{1969148206.10^{36}} = 6{,}76663.10^{-11}\, nw.m^2 kg^{-2}$$

Ejemplo de Cálculo. Datos orbitales del planeta Marte en su movimiento alrededor del Sol:

Utilizamos ahora el periodo de traslación de Marte alrededor del Sol, el radio medio de la órbita, y la masa del Sol. También con datos aproximados, tenemos:

$T = 686{,}6\ dias = 59322240\ segundos$

$R = 227936640\ kms = 2{,}27936640.10^{11} metros$ (distancia media al Sol)

$M = 1{,}98.10^{30}\ kgs$

$$G = \frac{4\pi^2 R^3}{T^2 M} = \frac{4.(3{,}14159265)^2.(2{,}27936640.10^{11})^3}{(59322240)^2.1{,}98.10^{30}} = \frac{467{,}5221182.10^{33}}{6{,}967873754.10^{45}} = 67{,}09681241.10^{-12} =$$

$$= 6{,}709681241.10^{-11}\ Nw.m^2.kg^{-2}$$

Referencias:

Wikipedia, Experimento de Cavendish
Alonso Finn, Física, vol 1, Fondo Educativo Interamericano, Panamá, 1970